Zerlegung eines normierten Polynoms vierten Grades in ein Produkt zweier quadratischer Polynome[1]

Ulrich Warnecke, Münster 14.06.2012

Gesucht wird folgende Zerlegungsmöglichkeit

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 + px + q)(x^2 + rx + s),$$

wobei $a, b, c, d, p, q, r, s \in \mathbb{R}$; eventuelle Einschränkungen siehe unten.
Dividiert man das Polynom vierten Grades durch $x^2 + px + q$, so erhält man

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 + px + q) \cdot (x^2 + \underbrace{(a-p)}_{=r} x + \underbrace{b - q - ap + p^2}_{=s}) \\ + \underbrace{(c - aq - bp + 2pq + ap^2 - p^3)}_{\text{soll verschwinden}} x + \underbrace{(d - bq + q^2 + apq - p^2 q)}_{\text{soll verschwinden}} \end{aligned}$$

Auflösung von $c - aq - bp + 2pq + ap^2 - p^3 = 0$ nach q ergibt $q = \dfrac{p^3 - ap^2 + bp - c}{2p - a}$; hierbei muss $p \neq \frac{a}{2}$ sein. (Zum Sonderfall $p = \frac{a}{2}$ siehe unten.) Setzt man dies in $d - bq + q^2 + apq - p^2 q = 0$ ein, so erhält man folgende Gleichung 6. Grades:

$$\begin{aligned} & p^6 - 3a \cdot p^5 + (3a^2 + 2b) \cdot p^4 + (-a^3 - 4ab) \cdot p^3 \\ & \quad + (ac - 4d + b^2 + 2a^2 b) \cdot p^2 + (-ab^2 - a^2 c + 4ad) \cdot p + (-c^2 + abc - a^2 d) = 0, \end{aligned}$$

die nach Multiplikation mit -1 und Klammerauflösung übergeht in

$$\begin{aligned} & a^3 p^3 - 3a^2 p^4 + 3ap^5 - p^6 - 2a^2 bp^2 + 4abp^3 - 2bp^4 \\ & \quad + a^2 cp - acp^2 + ab^2 p - b^2 p^2 - 4adp + 4dp^2 + c^2 - abc + a^2 d = 0 \end{aligned}$$

und durch geschickte Zusammenfassung in

$$p^3 (a-p)^3 - 2bp^2 (a-p)^2 + (ac + b^2 - 4d) p (a-p) + (c^2 - abc + a^2 d) = 0,$$

die nun mittels der Substitution $u = p(a - p)$ zu einer kubischen Gleichung („*kubische Resolvente*“) vereinfacht werden kann, die das Kernstück dieser Zerlegungsmethode darstellt:

$$\boxed{u^3 - 2b \cdot u^2 + (ac + b^2 - 4d) \cdot u + (c^2 - abc + a^2 d) = 0.}$$

Weiter ist

$$u = p(a-p) \;\Leftrightarrow\; p^2 - ap + u = 0 \;\Leftrightarrow\; p = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4u}) \;\vee\; p = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 4u}).$$

Man nehme jetzt $p = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4u})$ und wähle u so, dass $a^2 \geq 4u$. (Das ist möglich, weil jede kubische Gleichung mit reellen Koeffizienten stets mindestens eine reelle Lösung besitzt.) Dann kann man q, r, s bestimmen:

$$\begin{aligned} q &= \frac{p^3 - ap^2 + pb - c}{2p - a}, \\ r &= a - p, \\ s &= b - q - ap + p^2. \end{aligned}$$

[1] Die Dartellung stützt sich auf das von Joachim Mohr entwickelte Verfahren; siehe www.joachimmohr.de.

Setzt man $w = \sqrt{a^2 - 4u}\ \ (= 2p - a)$, gelangt man zu einer Umformulierung:

$$\boxed{\begin{aligned} p &= \frac{a+w}{2}, & r &= \frac{a-w}{2}, \\ q &= \frac{(b-u)(w+a)-2c}{2w}, & s &= \frac{(b-u)(w-a)+2c}{2w}. \end{aligned}}$$

Der Sonderfall *2p-a* = 0

Bei Ersetzung von a durch $2p$ wird aus der eingangs angegebenen Zerlegung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 + px + q) \cdot (x^2 + \underbrace{p}_{=r}\, x + \underbrace{b - q - p^2}_{=s}) + \underbrace{(c - bp + p^3)}_{\text{soll verschwinden}} x + \underbrace{(d - bq + q^2 + p^2 q)}_{\text{soll verschwinden}}$$

Das Verschwinden der letzten beiden Klammerausdrücke zieht zunächst $p = r = \frac{a}{2}$ nach sich und außerdem $s = b - q - p^2$. Somit liegen die Graphen der Funktionen $x \mapsto x^2 + px + q$ und $x \mapsto x^2 + px + s$ symmetrisch bzgl. derselben Parallelen $x = -\frac{p}{2}$ zur Hochachse, und daher gilt dies auch für die Funktion $x \mapsto x^4 + ax^3 + b^2 + cx + d$.

Die Bedingung $c - bp + p^3 = 0$ liefert mit $\frac{a}{2}$ an Stelle von p die mit $2p - a = 0$ gleichwertige Bedingung

$$c = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{8}a^3 \quad \left(\Leftrightarrow\ 8c = 4ab - a^3\right).$$

Statt $x = -\frac{p}{2}$ kann auch $x = -\frac{a}{4}$ genommen werden. Durch die Substitution $x = u - \dfrac{a}{4}$ geht die Gleichung $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ über in

$$u^4 + \left(-\frac{3}{8}a^2 + b\right)u^2 + \underbrace{\left(\frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{2}ab + c\right)}_{=0} u + \left(-\frac{3}{256}a^4 + \frac{1}{16}a^2 b - \frac{1}{4}ac + d\right) = 0,$$

aus der jetzt wegen des Verschwindens des zu u gehörigen Klammerausdrucks die biquadratische Gleichung

$$u^4 + \left(-\frac{3}{8}a^2 + b\right)u^2 + \left(-\frac{3}{256}a^4 + \frac{1}{16}a^2 b - \frac{1}{4}ac + d\right) = 0$$

entsteht, und der Graph der Funktion $u \mapsto u^4 + \left(-\frac{3}{8}a^2 + b\right)u^2 + \left(-\frac{3}{256}a^4 + \frac{1}{16}a^2 b - \frac{1}{4}ac + d\right)$ liegt symmetrisch bzgl. der Hochachse.

Schließlich bleibt noch die Bedingung $d - bq + q^2 + p^2 q = 0$ zu betrachten; sie ist äquivalent mit

$$q^2 - (b - p^2)q + d = 0,$$

die man wegen $b - p^2 = b - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{4ab - a^3}{4a} = \dfrac{8c}{4a} = \dfrac{2c}{a}$ umschreiben kann in

$$q^2 - \frac{2c}{a}q + d = 0;$$

diese Gleichung wird gelöst durch

$$q = \frac{c}{a} + \sqrt{c^2 - a^2 d} \quad \vee \quad q = \frac{c}{a} - \sqrt{c^2 - a^2 d}.$$

Damit hat man jetzt die Koeffizienten der beiden quadratischen Zerlegungspolynome gefunden:

$$\begin{aligned} p &= \frac{a}{2}, & r &= \frac{a}{2}, \\ q &= \frac{1}{a}\left(c + \sqrt{c^2 - a^2 d}\right), & s &= \frac{1}{a}\left(c - \sqrt{c^2 - a^2 d}\right). \end{aligned}$$

Beispiel zum Allgemeinfall

Das Polynom $2x^4 - x^3 - 5x^2 + x + 2$ soll in das Produkt zweier quadratischer Polynome zerlegt werden. Dazu wird zunächst der Faktor 2 ausgeklammert und bleibt (vorläufig) unberücksichtigt:

$$x^4 \underbrace{-\frac{1}{2}}_{=a} x^3 \underbrace{-\frac{5}{2}}_{=b} x^2 \underbrace{+\frac{1}{2}}_{=c} x \underbrace{+1}_{=d}.$$

Die hierzu gehörige kubische Gleichung

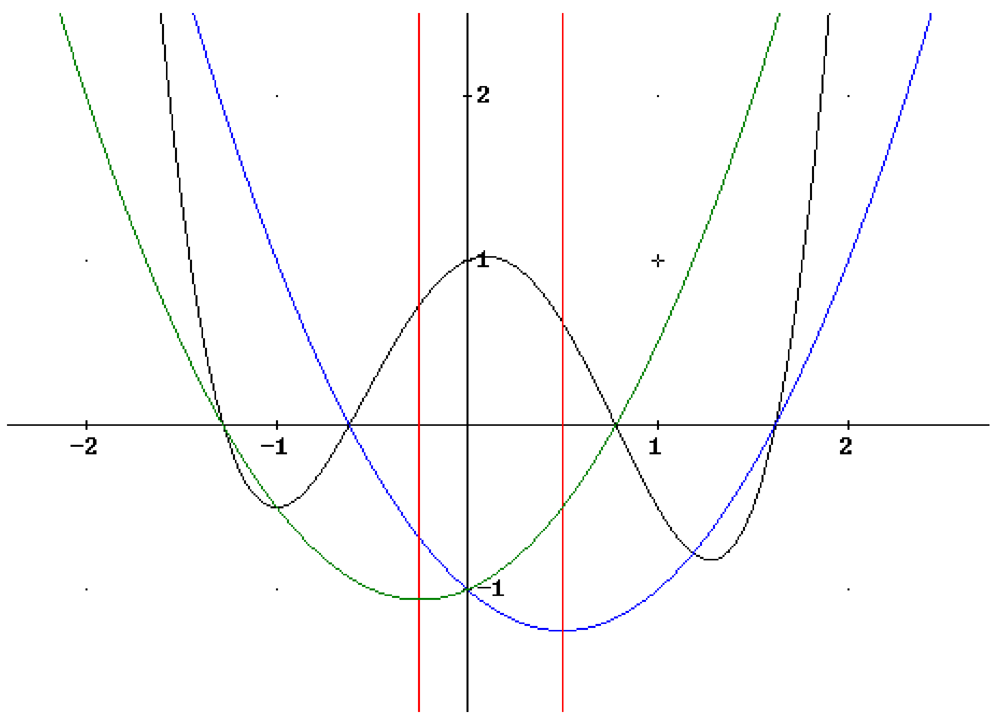
$$u^3 + 5u^2 + 2u - \frac{1}{8} = 0$$

wird (nicht nur) durch $u = -\frac{1}{2}$ gelöst (es existieren zwei weitere Lösungen), und man hat $a^2 = \frac{1}{4} \geq -2 = 4u$ und $w = \sqrt{a^2 - 4u} = \frac{3}{2}$. Damit findet man für die Koeffizienten der beiden quadratischen Zerlegungspolynome

$$p = \frac{1}{2}; \quad q = -1; \qquad r = -1; \quad s = -1.$$

Zieht man den bisher unberücksichtigt gebliebenen Faktor 2 wieder hinzu, dann hat sich insgesamt ergeben

$$2x^4 - x^3 - 5x^2 + x + 2 = (2x^2 + x - 2)(x^2 - x - 1).$$



Hiermit kann man jetzt sofort die Lösungsmenge der Gleichung $2x^4 - x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0$ angeben:

$$\mathcal{L} = \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}; \ \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \ \frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \ \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right\}.$$

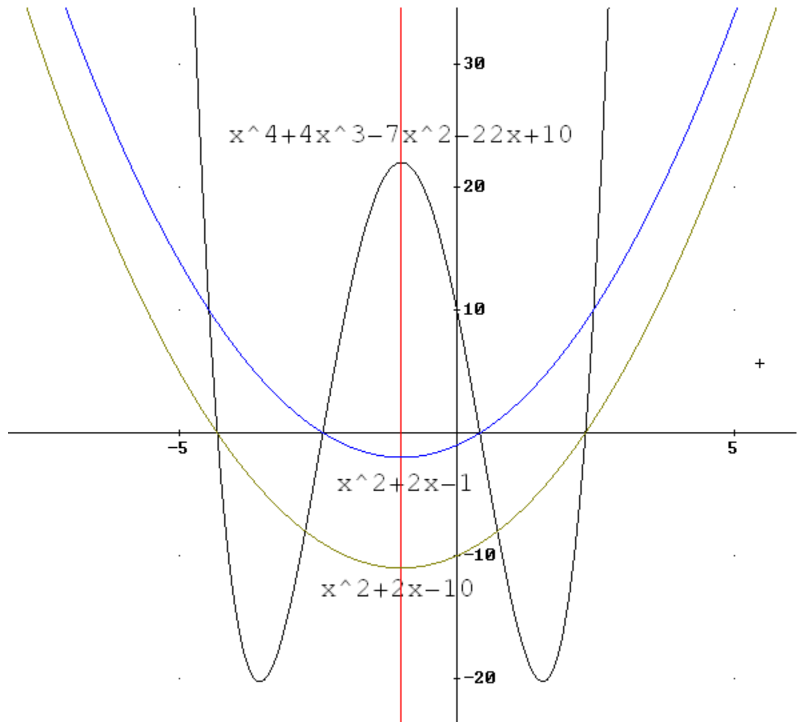
Beispiel zum Sonderfall *2p-a*

Gegeben sei das Polynom $x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 10$.

Hier hat man $4ab - a^3 = -112 - 64 = -176 = 8c$, so dass der Sonderfall tatsächlich vorliegt. Man kann die Koeffizienten der beiden quadratischen Zerlegungspolynome jetzt sofort angeben:

$$p = \frac{a}{2} = 2, \qquad r = \frac{a}{2} = 2,$$
$$q = \frac{1}{a}\left(c + \sqrt{c^2 - a^2 d}\right) = -1, \qquad s = \frac{1}{a}\left(c - \sqrt{c^2 - a^2 d}\right) = -10.$$

so dass $$x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 10 = (x^2 + 2x - 1)(x^2 + 2x - 10).$$



Auch hier kann man jetzt die Lösungsmenge der Gleichung $x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 10 = 0$ sofort angeben:

$$\mathcal{L} = \left\{-1 - \sqrt{2};\ -1 + \sqrt{2};\ -1 - \sqrt{11};\ -1 + \sqrt{11}\right\}.$$