

# Die vollständige Induktion - Lösungen

**1. Aufgabe:** Sind die folgenden Aussageformen in  $\mathbf{N}$  allgemeingültig?

- a) Wenn  $n$  ein Vielfaches von 6 ist, dann ist  $n$  eine gerade Zahl.
- b) Wenn  $n = 0$  ist, dann ist  $n + 1 = 1$ .
- c) Wenn  $n = n + 1$  ist, dann ist  $n + 1 = n + 2$ .

**Lösung:** Alle Aussagen sind allgemeingültig.

zu a) Wenn  $n$  durch  $6=2 \cdot 3$  teilbar ist, dann auch durch 2 ( $n \in \mathbf{N}$ ).

zu b und c) Diese Aussagen sind beweisbar: Addiere einfach 1 bei der Gleichung der wenn-Aussage, dann erhältst Du die dann-Aussage.

Es ist dabei völlig gleichgültig, ob die wenn-Aussage überhaupt für eine Einsetzung erfüllt werden kann.

Eine wenn-dann-Aussage ist nur dann **falsch**, wenn die wenn-Aussage wahr und die dann-Aussage falsch ist.

Der Logiker macht sich das am folgenden Schema klar:

A	B	wenn A, dann B
wahr	wahr	<b>wahr</b>
wahr	falsch	<b>falsch</b>
falsch	wahr	<b>wahr</b>
falsch	falsch	<b>wahr</b>

Zu b) Ersetzen wir in der **Aussageform** "Wenn  $n = 0$  ist, dann ist  $n + 1 = 1$ "  $n$  durch konkrete Werte, dann erhalten wir:

- Wenn  $1 = 0$  ist, dann ist  $1 + 1 = 1$  (wahr).
- Wenn  $2 = 0$  ist, dann ist  $2 + 1 = 1$  (wahr).
- Wenn  $3 = 0$  ist, dann ist  $3 + 1 = 1$  (wahr).
- ... (wahr),

Bei allen **Aussagen** ist die wenn-Aussage falsch. Somit ist automatisch die wenn-dann-Aussage **formal** richtig. (Deshalb spricht man auch von formaler Logik. Nicht immer entspricht sie der Umgangssprache.)

Dieselbe Argumentation gilt bei c):

- Wenn  $1 = 1 + 1$  ist, dann ist  $1 + 1 = 1 + 2$  (wahr).
- Wenn  $2 = 2 + 1$  ist, dann ist  $2 + 1 = 2 + 2$  (wahr).
- Wenn  $3 = 3 + 1$  ist, dann ist  $3 + 1 = 3 + 2$  (wahr).
- ... (wahr).

**Aufgabe 2a) Behauptung:**

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1 \quad A(n)$$

Beweis:

**Induktionsanfang:**

$$A(1): 1 + 2^1 = 2^2 - 1 \quad (\text{wahr, Probe stimmt})$$

**Induktionsschritt:**

$$\text{Sei } 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1 \quad A(n)$$

Daraus ist herzuleiten:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1 \quad A(n+1)$$

Herleitung:

$$\text{Aus } 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1 \text{ folgt:}$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1 \quad \text{q.e.d.}$$

**Aufgabe 2b) Behauptung:**

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq 1 + n \cdot \frac{1}{2} \quad A(n)$$

Beweis:

**Induktionsanfang:**

$$A(1): 1 + \frac{1}{1} \geq 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} \quad (\text{wahr})$$

Ich zeige noch, dass A(2) und A(3) wahr sind, obwohl es beim Beweis durch vollständige Induktion nicht notwendig ist. Man sieht hier jedoch sehr schön beispielhaft, wie der Schluss von A(n) auf A(n+1) erfolgt.

$$A(2) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + 2 \cdot \frac{1}{4}$$

$$A(3) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) > 1 + 3 \cdot \frac{1}{8}$$

### Induktionsschritt:

$$\text{Sei } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq 1 + n \cdot \frac{1}{2} \quad A(n)$$

Dann folgt daraus

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} \\ & \geq 1 + n \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n + 2^n} + \dots + \frac{1}{2^n + 2^n} \quad (\text{Beachte: } \frac{1}{2^n + 2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}) \\ & = 1 + n \cdot \frac{1}{2} + \frac{2^n \cdot \frac{1}{2^n + 2^n}}{2^n} = 1 + n \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + (n+1) \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Und damit ist gezeigt, dass auch A(n+1) gilt.

### Lösung zu Aufgabe 3:

Alle Lösungen bis auf e) sind in den Lösungen von Aufgabe 4 nachzuschauen:

$$e) A(n) \Leftrightarrow n = n + 1$$

$$A(1) \Leftrightarrow 1 = 1 + 1 \text{ (falsch. Deshalb ist } A(n) \text{ nicht allgemeingültig)}$$

$$A(n+1) \Leftrightarrow n + 1 = n + 2$$

### Lösungen zu Aufgabe 4:

#### a) Behauptung:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad A(n)$$

Beweis durch vollständige Induktion:

#### I Induktionsanfang:

$$A(1): \quad 1 = 1^2 \text{ (wahr)}$$

#### Induktionsschritt:

$$\text{Sei } 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad A(n)$$

Daraus ist herzuleiten:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2 \quad A(n+1)$$

Herleitung:

$$\text{Aus } 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \text{ folgt:}$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2 \quad \text{q.e.d.}$$

#### b) Behauptung:

$$5 + 8 + 11 + 14 + \dots + (5 + 3 \cdot n) = 5(n+1) + 3 \frac{n \cdot (n+1)}{2} \quad A(n)$$

Beweis durch vollständige Induktion:

#### I Induktionsanfang:

$$A(1): \quad 5 + 8 = 5 \cdot 2 + 3 \cdot \frac{1 \cdot 2}{2} \text{ (wahr)}$$

#### Induktionsschritt:

$$\text{Sei } 5 + 8 + 11 + 14 + \dots + (5 + 3 \cdot n) = 5(n+1) + 3 \frac{n \cdot (n+1)}{2} \quad A(n)$$

Daraus ist herzuleiten:

$$5 + 8 + 11 + 14 + \dots + (5 + 3 \cdot n) + (5 + 3 \cdot (n+1)) = 5(n+2) + 3 \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} \quad A(n+1)$$

Herleitung:

$$\text{Aus } 5 + 8 + 11 + 14 + \dots + (5 + 3 \cdot n) = 5(n+1) + 3 \frac{n \cdot (n+1)}{2} \text{ folgt}$$

$$\begin{aligned} & 5 + 8 + 11 + 14 + \dots + (5 + 3 \cdot n) + (5 + 3 \cdot (n+1)) = 5(n+1) + 3 \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (5 + 3 \cdot (n+1)) \\ & = 5n + 5 + \frac{3}{2}(n + n) + 5 + 3n + 3 = \frac{3}{2}n^2 + \frac{9}{2}n + 13 \end{aligned}$$

Jetzt brauche ich nur noch die rechte Seite von A(n+1) ausmultiplizieren und ordnen, um zu zeigen, dass dies dasselbe ist.

$$(n+1) \cdot (n+2) \quad \quad \quad 3 \quad 2 \quad \quad \quad 3 \quad 2 \quad 1$$

$$5(n+2) + 3 \frac{(n+1)(n+2)}{2} = 5n + 10 + \frac{3}{2}(n + 3n + 2) = \frac{5}{2}n + \frac{9}{2}n + 13$$

q.e.d

**c) Behauptung:**

$$a + (a+k) + (a + 2k) + (a + 3k) + \dots + (a + nk) = a(n+1) + k \frac{n \cdot (n+1)}{2} \quad A(n)$$

**Beweis durch vollständige Induktion:**

**I Induktionsanfang:**

$$A(1): a + (a + k) = a \cdot 2 + k \cdot \frac{1 \cdot 2}{2} \quad (\text{wahr})$$

**Induktionsschritt:**

$$\text{Sei } a + (a+k) + (a + 2k) + (a + 3k) + \dots + (a + nk) = a(n+1) + k \frac{n \cdot (n+1)}{2} \quad A(n)$$

Daraus ist herzuleiten:

$$a + (a+k) + (a + 2k) + (a + 3k) + \dots + (a + nk) + (a + (n+1)k) \quad A(n+1)$$

$$= a(n+2) + k \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Herleitung:

$$\text{Aus } a + (a+k) + (a + 2k) + (a + 3k) + \dots + (a + nk) = a(n+1) + k \frac{n \cdot (n+1)}{2} \text{ folgt}$$

$$a + (a+k) + (a + 2k) + (a + 3k) + \dots + (a + nk) + (a + (n+1)k)$$

$$= a(n+1) + k \frac{n(n+1)}{2} + (a + (n+1)k) = an + a + \frac{k}{2}(n^2 + n) + a + nk + k$$

$$= \frac{k}{2}n^2 + (a + \frac{3}{2}k)n + 2a + k$$

Jetzt brauche ich nur noch die rechte Seite von A(n+1) ausmultiplizieren und ordnen, um zu zeigen, dass dies dasselbe ist.

$$= a(n+2) + k \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2} = an + 2a + \frac{k}{2}(n^2 + 3n + 2) = \frac{k}{2}n^2 + (a + \frac{3}{2}k)n + 2a + k$$

q.e.d

**d) Behauptung:**

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \dots + ax^n = a \cdot \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad A(n)$$

**Beweis durch vollständige Induktion:**

**I Induktionsanfang:**

$$A(1): a + ax = a \frac{1 - x^2}{1 - x} \quad (\text{wahr, da } 1-x^2 = (1+x)(1-x))$$

**Induktionsschritt:**

$$\text{Sei } a + ax + ax^2 + ax^3 + \dots + ax^n = a \cdot \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad A(n)$$

Daraus ist herzuleiten:

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \dots + ax^n + ax^{n+1} = a \cdot \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x} \quad A(n+1)$$

Herleitung:

$$\text{Aus } a + ax + ax^2 + ax^3 + \dots + ax^n = a \cdot \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \text{ folgt}$$

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \dots + ax^n + ax^{n+1} = a \cdot \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + ax^{n+1}$$

$$= a \frac{1 - x^{n+1} + x^{n+1}(1 - x)}{1 - x} = a \frac{1 - x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2}}{1 - x} = a \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}$$

q.e.d

**f) Behauptung:**

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1) \quad A(n)$$

**Beweis durch vollständige Induktion:**

**I Induktionsanfang:**

$$A(1): 1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \quad (\text{wahr})$$

**Induktionsschritt:**

$$\text{Sei } 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)$$

Daraus ist herzuleiten:

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}(n+1) \cdot (n + 2) \cdot (2n + 3) \quad A(n+1)$$

Herleitung:

$$\text{Aus } 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1) \text{ folgt}$$

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1) + (n+1)^2$$

$$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + n^2 + 2n + 1 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{6}n + 1$$

Jetzt brauche ich nur noch die rechte Seite von  $A(n+1)$  ausmultiplizieren und ordnen, um zu zeigen, dass dies dasselbe ist.

$$\frac{1}{6}(n+1) \cdot (n+2) \cdot (2n+1) = \frac{1}{6}(2n^3 + 9n^2 + 13n + 6) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{6}n + 1$$

q.e.d

### g) Behauptung:

$3^n - 3$  ist durch 6 teilbar.

**Beweis durch vollständige Induktion:**

#### I Induktionsanfang:

$A(1)$   $3 - 3$  ist durch 6 teilbar (wahr, da  $0:6=0$ )

#### Induktionsschritt:

Sei  $3^n - 3$  durch 6 teilbar,

d.h.  $3^n - 3 = 6k$  für ein passendes  $k \in \mathbf{N}$ ,

Daraus ist herzuleiten:

$3^{n+1} - 3$  ist durch 6 teilbar.

Herleitung:

Aus  $3^n - 3 = 6k$  folgt

$$3^{n+1} - 3 = 3(3^n - 1) = 3 \cdot (3^n - 3 + 2)$$

(Einsamer Trick: Ich muß unbedingt  $3^n - 3$  durch  $6k$  ersetzen.)

$$= 3 \cdot (6k + 2) = 18k + 6 = 6 \cdot (3k + 1)$$

Also ist  $3^{n+1} - 3$  das  $(3k+1)$ -Vielfache von 6

und damit durch 6 teilbar.

q.e.d.

### h) Behauptung: Für $p > -1$ und $n \geq 2$ gilt:

$$(1+p)^n > 1 + n \cdot p \quad A(n)$$

**Beweis durch vollständige Induktion:**

#### I Induktionsanfang:

$A(2)$   $(1+p)^2 > 1+2p$  (wahr, da  $(1+p)^2 = 1 + 2p + 1 > 1 + 2p$ )

#### Induktionsschritt:

Sei  $(1+p)^n > 1 + n \cdot p \quad A(n)$

Daraus ist herzuleiten:

$$(1+p)^{n+1} > 1 + (n+1) \cdot p \quad A(n+1)$$

Herleitung:

Aus  $(1+p)^n > 1 + n \cdot p$  folgt

$$(1+p)^n \cdot (1+p) > (1 + n \cdot p)(1 + p)$$

Also:  $(1+p)^{n+1} > (1 + n \cdot p + p + n \cdot p^2) > (1 + n \cdot p + p) = 1 + (n+1) \cdot p$

q.e.d.

### i) Behauptung:

Für  $f(x) = (x+2) \cdot e^x$  ist die  $n$ -te Ableitung

$$f^{(n)}(x) = (x + n + 2) \cdot e^x$$

**Beweis durch vollständige Induktion:**

#### I Induktionsanfang:

$A(1)$  Die Ableitung ist  $f'(x) = e^x + (x+2)e^x = (x+3)e^x$

Formel  $f^{(1)}(x) = (x + 1 + 2) \cdot e^x$  (Formel stimmt für  $n=1$ )

#### Induktionsschritt:

Sei  $f^{(n)}(x) = (x + n + 2) \cdot e^x \quad A(n)$

Daraus ist herzuleiten:

$$f^{(n+1)}(x) = (x + n + 3) \cdot e^x \quad A(n+1)$$

Herleitung:

Aus  $f^{(n)}(x) = (x + n + 2) \cdot e^x$  folgt durch Ableiten:

$$f^{(n+1)}(x) = e^x + (x+n+2) \cdot e^x = (x + n + 3) e^x$$

**j) Behauptung:**

Für  $f(x) = (x+2) \cdot e^{-x}$  ist die n-te Ableitung

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n (x+2-n) \cdot e^{-x}$$

**Beweis durch vollständige Induktion:****I Induktionsanfang:**

A(1) Die Ableitung ist  $f'(x) = e^{-x} - (x+2)e^{-x} = -(x+1)e^{-x}$

$$\text{Formel } f^{(1)}(x) = (-1)^1 (x+2-1) \cdot e^{-x} \quad (\text{Formel stimmt für } n=1)$$

**Induktionsschritt:**

Sei  $f^{(n)}(x) = (-1)^n (x+2-n) \cdot e^{-x}$  A(n)

Daraus ist herzuleiten:

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} (x+1-n) \cdot e^{-x} \quad \text{A(n+1)}$$

Herleitung:

Aus  $f^{(n)}(x) = (-1)^n (x+2-n) \cdot e^{-x}$  folgt

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (-1)^n (e^{-x} - (x+2-n)e^{-x}) \\ &= (-1)^n (1-x-2+n)e^{-x} \\ &= (-1)^n (-x-1+n)e^{-x} = (-1)^{n+1} (x+1-n)e^{-x} \end{aligned}$$

q.e.d.

**Lösung zur 5. Aufgabe (Tilgung eines Darlehens):**

Die Folge  $(a_n)$  wird rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} a_1 &= a \\ a_{n+1} &= r \cdot a_n + s \quad \text{für } n \geq 0 \quad (r \neq 1) \end{aligned}$$

Behauptung: Für die Folge gibt es einen geschlossenen Ausdruck der Form

$$A(n) \quad a_n = c \cdot r^n + d \quad (n \geq 0) \quad \text{für passende Zahlen } c \text{ und } d.$$

**Lösung:** Zuerst müssen wir c und d bestimmen.

Dies erreichen wir dadurch, dass wir  $n=0$  und  $n=1$  in  $A(n)$  einsetzen. (Dies war auch der Grund, dass wir diesmal mit  $n=0$  anfangen. Das folgende Gleichungssystem ist dann einfacher lösbar.)

$$A(0) \quad a_0 = a = c \cdot r^0 + d$$

$$A(1) \quad a_1 = r \cdot a_0 + s = c \cdot r^1 + d$$

Lösen wir die beiden Gleichungen  $a = c + d$  und  $r \cdot a + s = c \cdot r + d$  nach c und d auf, so erhalten wir

$$d = \frac{s}{1-r} \quad \text{und} \quad c = a - \frac{s}{1-r}$$

Folglich müssen wir folgende Formel beweisen:

$$A(n) \quad a_n = \left(a - \frac{s}{1-r}\right) \cdot r^n + \frac{s}{1-r}$$

**Beweis:**

**Induktionsanfang:**

$$A(0) \quad a_0 = \left(a - \frac{s}{1-r}\right) \cdot r^0 + \frac{s}{1-r} \quad (\text{Formel stimmt für } n=0)$$

**Induktionsschritt:**

$$\text{Sei } A(n) \quad a_n = \left(a - \frac{s}{1-r}\right) \cdot r^n + \frac{s}{1-r}$$

Daraus ist herzuleiten:

$$A(n+1) \quad a_{n+1} = \left(a - \frac{s}{1-r}\right) \cdot r^{n+1} + \frac{s}{1-r}$$

Herleitung:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= r \cdot a_n + s = r \cdot \left[\left(a - \frac{s}{1-r}\right) \cdot r^n + \frac{s}{1-r}\right] + s \\ &= \left(a - \frac{s}{1-r}\right) \cdot r^{n+1} + \frac{rs}{1-r} + s \\ &= \left(a - \frac{s}{1-r}\right) \cdot r^{n+1} + \frac{s}{1-r}, \quad \text{da } \frac{rs}{1-r} + s = \frac{s}{1-r} \end{aligned}$$

q.e.d.

**Beispiel:**

Ein Darlehen von 200 000 € wird mit 4% (am Ende des Jahres) verzinst und jährlich (am Ende des Jahres) mit 10 000 € getilgt.

Wie groß ist die Restschuld nach 1 Jahr, nach 2, nach 3, ..., nach n Jahren ? Wann ist es getilgt?

**Lösung:**

Dies ist ein Folge der Form

$$K_0 = a$$

$$K_{n+1} = r \cdot K_n + s \quad \text{für } n \geq 0 \quad (r \neq 1)$$

mit  $a = 200\,000$ ,  $r=1,04$  und  $s = -10\,000$ .

Die Lösung lautet also:

$$K_n = \left(a - \frac{s}{1-r}\right) \cdot r^n + \frac{s}{1-r} = (200000 - 250000) \cdot 1,04^n + 250000$$

Somit (alles in €):

$$K_0 = 200\,000, \quad K_1 = 198\,000, \quad K_2 = 195\,920, \quad K_3 = 193\,756,8, \quad \dots$$

Das Darlehen ist getilgt, wenn  $-50000 \cdot 1,04^n + 250000 = 0$

$$\Rightarrow 1,04^n = 5 \Rightarrow n = \frac{\lg 5}{\lg 1,04} = 41,035$$

Somit bleibt nach 41 Jahren noch eine Restschuld von

$$K_{41} = 346,92, \text{ die mit der 41 Rate getilgt werden kann.}$$

**Bemerkung:** Eine einfache Herleitung (ohne vollständige Induktion) der Formel ist:

Rekursionsvorschrift:  $a_0 = a \quad a_{n+1} = r \cdot a_n + s$

$$a_0 = a$$

$$a_1 = r \cdot a + s$$

$$a_2 = r^2 \cdot a + r \cdot s + s$$

$$a_3 = r^3 \cdot a + r^2 \cdot s + r \cdot s + s$$

$$a_4 = r^4 \cdot a + r^3 \cdot s + r^2 \cdot s + r \cdot s + s$$

... (der kritische Schritt, der nicht vollständig überzeugt)

$$a_n = r^n \cdot a + (r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + r^2 + r + 1) \cdot s \quad (*)$$

Mit der bekannten Formel der geometrischen Reihe folgt:

$$a_n = r^n \cdot a + \frac{1-r}{1-r} \cdot s = \left(a - \frac{s}{1-r}\right) r^n + \frac{s}{1-r}$$

Bemerkung: Für  $r=1$  ist (\*) auch noch gültig:  $a_n = a + n \cdot s$  (für  $r=1$ )

**Lösung zur 6. Aufgabe:** (Ein direkter Beweis folgt nach dem Induktionsbeweis):

**Behauptung:**  $\binom{2k}{k} = (-4)^k \cdot \binom{-1/2}{k} \quad (k \in \mathbb{N}_0)$

**Beweis:**

**Induktionsanfang:**

Für  $k=0$  ist  $\binom{2k}{k} = \binom{0}{0} = 1$  und  $(-4)^k \cdot \binom{-1/2}{k} = (-4)^0 \cdot \binom{-1/2}{0} = 1 \cdot 1 = 1$

Die Formel stimmt also für  $n=0$ .

**Induktionsschritt:**

sei  $\binom{2k}{k} = (-4)^k \cdot \binom{-1/2}{k}$  (für  $k > 0$ )

Zu bweisen ist:  $\binom{2k+2}{k+1} = (-4)^{k+1} \cdot \binom{-1/2}{k+1}$

**Nachweis:**

Zur ersten Umwandlung zunächst zwei konkrete Beispiele:

Für  $k=4$  ist  $\binom{2k}{k} = \binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

und  $\binom{2k+2}{k+1} = \binom{10}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \binom{8}{4} \cdot \frac{10 \cdot 9}{5 \cdot 5}$

Für  $k=5$  ist  $\binom{2k}{k} = \binom{10}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$

$$\text{und } \binom{2k+2}{k+1} = \binom{12}{6} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \binom{10}{5} \cdot \frac{12 \cdot 11}{6 \cdot 6}$$

Jetzt allgemein:

$$\binom{2k+2}{k+1} = \binom{2k}{k} \cdot \frac{(2k+2) \cdot (2k+1)}{(k+1) \cdot (k+1)} = \binom{2k}{k} \cdot \frac{2 \cdot (2k+1)}{k+1}$$

Mit dieser Umwandlung und

$$\binom{-1/2}{k+1} = \frac{-1/2-k}{k+1} \cdot \binom{-1/2}{k}, \text{ also } \binom{-1/2}{k} = \binom{-1/2}{k+1} \cdot \frac{k+1}{-1/2-k} = \binom{-1/2}{k+1} \cdot \frac{-2 \cdot (k+1)}{1+2k}$$

$$\text{folgt: } \binom{2k+2}{k+1} = \frac{2 \cdot (2k+1)}{k+1} \cdot \binom{2k}{k} = \frac{2 \cdot (2k+1)}{k+1} \cdot (-4)^k \cdot \binom{-1/2}{k}$$

$$= \frac{2 \cdot (2k+1)}{k+1} \cdot (-4)^k \cdot \binom{-1/2}{k+1} \cdot \frac{-2 \cdot (k+1)}{1+2k}$$

$$= (-4)^{k+1} \cdot \binom{-1/2}{k+1}$$

q.e.d.

**Direkter Beweis** (mit den für einen mathematischen Puristen verbotenen Pünktchen):

$$\binom{-1/2}{k} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(-\frac{2k-1}{2}\right) \cdot \frac{1}{k!}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{k!}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot 2k}{k! \cdot 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k} = \left(-\frac{1}{4}\right)^k \cdot \frac{(2k)!}{k! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$$

$$= \left(-\frac{1}{4}\right)^k \cdot \frac{(2k)!}{k! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-k)} = \left(-\frac{1}{4}\right)^k \cdot \binom{2k}{k}$$

q.e.d. (Jutta Gut)