Reine, mitteltönige und andere Stimmungen

oder

Das syntonische Komma in der Musiktheorie und alles, was damit zusammenhängt

Hinweis: Diesen Kurs können Sie auch auf Ihrem Computer installieren. Download,

Alle Tonbeispiele dieser Lektionen wurden mit dem Program TTMusik erzeugt. Weiter ausführlichere Beispiele findet man in dem Programm. Dort besteht auch die Möglichkeit sie abzuändern und zu erweitern.

- Einführung
- 1. Lektion Töne, Intervalle, Frequenzen und Frequenzverhältnisse
- 2. Lektion Hintereinanderausführung zweier Tonschritte. Reine Stimmung
- 3. Lektion Beschreibung von Tonsystemen ohne Akustik
- 4. Lektion Das Centmaß für Intervalle
- 5. Lektion Die gleichstufige Stimmung
- 6. Lektion Das pythagoreische und syntonische Komma
- 7. Lektion Modulationen
- 8. Lektion Mitteltönige und wohltemperierte Stimmungen
- 9. Lektion Der Akkord der 2. Stufe, die Kommafalle, der neapolitanische Sextakkord und die Doppeldominante

- Ergänzung a) Modulation Dur-Moll in der gleichen Tonart
- Ergänzung b) Die verminderte Terz und die übermäßige Sekunde
- Ergänzung c) Passus Duriusculus

- Anhang I Hörbeispiele
- Anhang II weitere Hörbeispiele
- Anhang III Vertiefung zur Feinanalyse bei Modulationen
- Anhang IV Mathematische Beschreibung von Tonsystemen

- Alle Intervalle, rein pythagoreisch und mitteltönig
- Alle Intervalle der Größe nach geordnet

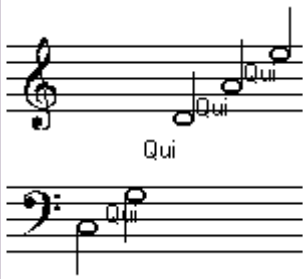
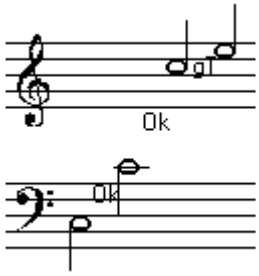
- Literatur

In diesen Lektionen versuche ich **für Musiker**, also im Normalfall für mathematische Laien, das mathematische Grundwissen der Grundlagen darzustellen. Für den Kenner dürften die **Hörbeispiele** ganz unterhaltsam sein.

Das **Centmaß** für Intervalle ist manchmal ganz nützlich. Hier wird es ausführlich erklärt und Ihnen - hoffe ich - in Zukunft keine Abschreckung zum Weiterlesen sein.

Wenn in der ersten Lektion - wie bei Pythagoras - von Verhältnissen ausgegangen wird, heißt das nicht, dass die ganze Theorie darauf aufbaut. Im Gegenteil: Für das musikalische Verständnis ist hinreichend, zu wissen, dass zum Beispiel die Aufeinanderfolge von 4 Quinten nicht dasselbe ist wie die Aufeinanderfolge von zwei Oktaven und einer großen Terz. Dies kann man in einer passenden mathematischen Schreibweise folgendermaßen zum Ausdruck bringen: **4Qui ≠ 2Ok + gT**. Das wiederum brauchen Sie nicht nachrechnen, denn Sie können es in einem **Hörtest** nachprüfen. Es handelt sich hier also - wie bei Aristoxenos - hauptsächlich um eine hörpsychologische Theorie.

Bitte anklicken! Wenn Sie gefragt werden, "abspeichern oder öffnen", dann öffnen!

spiele c g d' a' e"	spiele c c' c" e"	spiele erstes e", zweites e" und beide gleich
		Wenn Sie genau hinhören ist das zwe etwas tiefer als das erste. Die Lektionen erklären diesen Unters Um es vorweg zu nehmen: Dieser Unterschied heißt **syntonisches Komma** oder **Terzko**

Kommentare sind ausdrücklich erwünscht.

Die Klangbeispiele wurden mit dem Programm TTMusik erzeugt. Die Frequenzen, Frequenzverhältnisse, Intervalle und Centangaben werden dort automatisch berechnet.

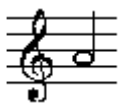
Hier sind die Musikstücke als MP3-Datei abgespeichert. Dazu benötigen Sie ein passendes Programm für Ihr Betriebssystem, am besten eines, das die Datei gleich abspielt und nicht erst abspeichert.

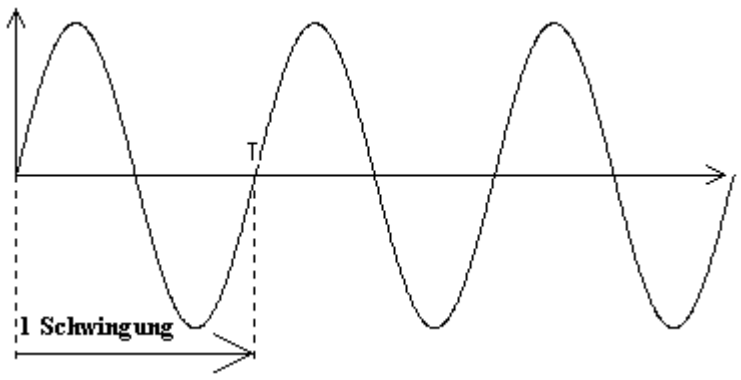
---

1. Lektion

1. Lektion: Töne, Intervalle, Frequenzen und Frequenzverhältnisse

Ein **Ton** kann auf zweierlei Art beschrieben werden:

1. Hörpsychologisch: Als Wahrnehmung eines Tones. spiele den Ton a´

2. Physikalisch: Als Luftschwingungen. Diesen kann man eine **Frequenz** zuordnen.



Hier: Ton a'

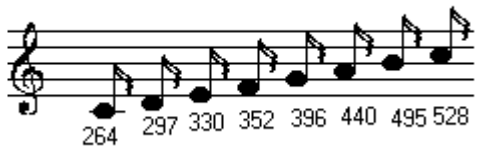
Frequenz: 440 Schwingungen pro Sekunde

Frequenz: f = 440 Hz (Hertz)

Schwingungsdauer: T = 2,273 ms

Umrechnung: $T = \frac{1}{f}$; $f = \frac{1}{T}$

Frequenz in Hz (Schwingungen pro Sekunde)

Je höher der Ton,
um so höher die Frequenz.
Dies wird hier an der
C-Dur-Tonleiter demonstriert.

spiele Tonleiter

Durch ein **Intervall** wird das Nacheinanderausführen oder Zusammenklingen von zwei Tönen beschrieben.

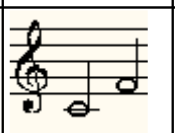
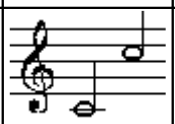
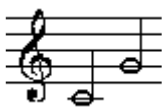
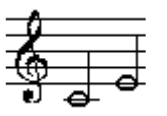
Ein **musikalischer** Mensch kann das zu zwei Tönen gehörende Intervall **ohne Hilfsmittel** zuordnen.

Dabei ist es unerheblich, was als erster Ton erklingt.

Zum Beispiel ist das Intervall von c' nach g' dasselbe wie von f' nach c'', nämlich eine Quinte.

Wir werden dafür folgende Schreibweise einführen: Qui = c'g' = f'c''.

Physikalisch wird das **Intervall** durch das **Frequenzverhältnis** beschrieben.

Intervall	Noten	Frequenzverhältnis	Hören	Zusammen
Oktav		528:264=2:1	Oktav	Oktav
Quint		396:264=3:2	Quinte	Quinte
Quart		352:264=4:3	Quarte	Quarte
große Terz		330:264=5:4	große Terz	große Terz

Zu erwähnen bleibt noch die **Prim**. Das ist das Intervall, bei dem beide Töne gleich sind. Zu hören ist ein Ton, nur etwas lauter.

Diese Intervalle klingen rein, d.h. ohne **Schwebungen**. Ein Beispiel mit Schwebungen haben Sie in der Einführung schon kennengelernt:

spiele erstes e'', zweites e'' und beide gleichzeitig

Dasselbe noch einmal mit reiner Sinusschwingung (ohne Beimischung von Obertönen)

reine Prim, verstimmte Prim höre auch hier

Hier noch weitere Beispiele zu Schwebungen. Bei der Oktave und Quinte wurde die Frequenz des zweiten Tones um 1,5 %) erniedrigt. Achten Sie auch hier auf die Schwebungen.

unreine Oktav | unreine Quinte | unreine Quinte mit verstärktem Differenzton

Ein extremes Beispiel ist die "Fiathupe".

c"e" rein | c"e" verstimmt

Hier sind tiefere Töne (sogenannte Differenztöne) hervorgehoben, die man nur sehr leise bei einem Zweiklang mithört. (Die Verstimmung bei c" e" ist übrigens nur die der gleichstufigen Stimmung).

Frequenzverhältnisse gibt man mit möglichst kleinen Zahlen an:

c'' hat die Frequenz von 528 Hz, c' von 264 Hz.

$$\text{Also hat die Oktav das Frequenzverhältnis } \frac{c''}{c'} = \frac{528}{264} = \frac{2}{1}$$

$$\text{Entsprechend: Quinte} = \frac{g'}{c'} = \frac{396\ Hz}{264\ Hz} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Quarte} = \frac{f'}{c'} = \frac{352\ Hz}{264\ Hz} = \frac{4}{3}$$

$$\text{große Terz} = \frac{e'}{c'} = \frac{330\ Hz}{264\ Hz} = \frac{5}{4}$$

$$\text{Sekunde} = \frac{d'}{c'} = \frac{297\ Hz}{264\ Hz} = \frac{9}{8}$$

Das Frequenzverhältnis ist unabhängig vom Grundton, entscheidend ist nur das Intervall..
Zum Beispiel ist:
das Frequenzverhältnis der Oktav von g' zu g" = 792 : 396 = 2:1 und
das Frequenzverhältnis der Quint von g' zu d" = 594 : 396 = 3:2.

Sie sehen hier auch - da das Frequenzverhältnis der Oktav 2:1 ist -, dass der Ton, der eine Oktav höher erklingt, doppelte Frequenz hat.

(Die Frequenz von g" ist die doppelte von g', die von d" die doppelte von d'.)

Die Frequenzverhältnisse aller Intervalle

(In Klammer stehen die künftig verwendeten Abkürzungen der Intervalle.)

Die Oktave (Ok): Frequenzverhältnis
Beispiel: c" : c' = 528 Hz : 264 Hz = 2 : 1

Die Quinte (Qui): Frequenzverhältnis 3:2
Beispiel: g' : c' = 396 Hz : 264 Hz = 3 : 2

Die Quarte (Qua): Frequenzverhältnis 4:3
Beispiel: f' : c' = 352 Hz : 264 Hz = 4 : 3

Die Quinte und die Quarte ergänzen sich zur Oktave: Qui + Qua = Ok

Die große Terz (gT): Frequenzverhältnis 5:4 .
Beispiel: e' : c' = 330 Hz : 264 Hz = 5 : 4

Die kleine Sext (kSext): Frequenzverhältnis 8:5 .
Beispiel: as' : c' = 422,4 Hz : 264 Hz = 8 : 5

Die große Terz und die kleine Sext ergänzen sich zur Oktave: gT + kSext = Ok

Die kleine Terz (kT): Frequenzverhältnis 6:5 .
Beispiel: es' : c' = 316,8 Hz : 264 Hz = 6 : 5

Die große Sext (gSext): Frequenzverhältnis 5:3 .
Beispiel: a' : c' = 440 Hz : 264 Hz = 5 : 3

Die große Terz und die kleine Sext ergänzen sich zur Oktave: kT + gSext = Ok

Achtung: Es gibt zwei Ganztöne (Ganzton = Sekunde). Das ist der Grund, weshalb wir zwischen reiner, mitteltöniger,

wohltemperierter und gleichförmiger Stimmung unterscheiden müssen. Am natürlichsten ist die reine Stimmung (das "diatonische Stimmungsprinzip" unserer Tonleitern), die wir hier zunächst besprechen. Da dies zu Schwierigkeiten bei Tasteninstrumenten bezüglich der Modulationen führt, hat sich heutzutage die gleichstufige Stimmung durchgesetzt, bei der zwölf Quinten sieben Oktaven ergeben und zwei Ganztöne eine große Terz.

Der große Ganzton (G): Frequenzverhältnis 9:8
Beispiel: d' : c' = 297 Hz : 264 Hz = 9 : 8
Der kleine Ganzton (G-): Frequenzverhältnis 10:9
Beispiel: e' : d' = 330 Hz : 297 Hz = 10 : 9

Entsprechend gibt es zwei kleine Septimen (kSept und kSept+).

Die kleine Septime kSept: Frequenzverhältnis 16:9
Beispiel: c'' : d' = 528 Hz : 297 Hz = 16 : 9

Die kleine Septime kSept+: Frequenzverhältnis 9:5
Beispiel: d'' : e' = 594 Hz : 330 Hz = 5 : 9

Der große Ganzton und der kleine Ganzton ergeben zusammen eine große Terz: G + (G-) = gT.

Ganzton und die kleine Septime ergänzen sich zur Oktave: G + kSept = Ok bzw. (G-) + (kSept+) = Ok

Der Halbton (H): Frequenzverhältnis 16:15.
Beispiel: f' : e' = 352 Hz : 330 Hz = 16 : 15

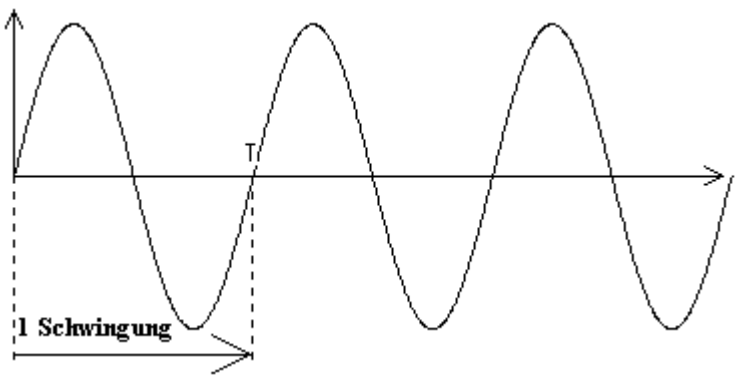
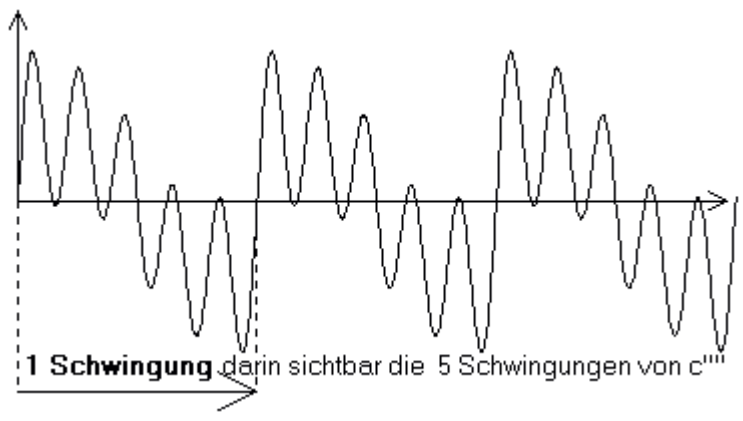
Die große Septime (gSept): Frequenzverhältnis 15:8.
Beispiel: h' : c' = 495 Hz : 264 Hz = 15 : 8

Halbton und die große Septime ergänzen sich zur Oktave: H + gSept = Ok

Bemerkung: Der geniale Pythagoras kam auf die selben Verhältnisse über das Messen von Saitenlängen am Metronom.

Außer **Tonhöhe** und **Lautstärke** ist ein wichtiges Charakteristikum eines Tones die Klangfarbe.

Diese hängt davon ab, in wie stark die Obertöne mitschwingen. Man sieht dieses an der Schwingungsform.

Einen Ton, bei dem keine Obertöne mitschwingen, nennt man eine reine **Sinusschwingung.** Er klingt langweilig.		Ton a' (reiner Sinuston)
Eine ganz andere Schwingungsform hat ein Ton, bei dem viele Obertöne mitschwingen. Hier: **Grundton**: (440 Hz) 100%, 1 Oberton (**Ok**) (880 Hz) 25% 2. Oberton (**Ok+Qui**) (1320 Hz) 25% 3. Oberton (**2Ok**) (1760 Hz) 25% 4. Oberton (**2Ok +gT**) (2 200 Hz)100%(!) Je mehr und stärker hohe Obertöne beigemischt sind, desto schärfer klingt der Ton.		Ton a' (obertonreich) Wenn Sie genau hinhören, können Sie die hohe Terz cis'''' in diesem Ton mithören. Ton cis''''

Mit dem Programm TTmusik können bei Tönen und Akkorde angeben, welche Obertöne in beliebiger Stärke dem Sinuston beigemischt werden.

---

2. Lektion

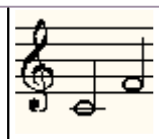
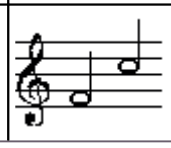
2. Lektion: Hintereinanderausführung zweier Tonschritte
und
Reine Stimmung

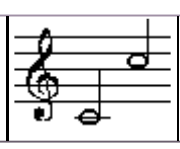
In Lektion 1 wurde dieser Vorgang schon vorweggenommen:

"Die Quinte und die Quarte ergänzen sich zur Oktave."

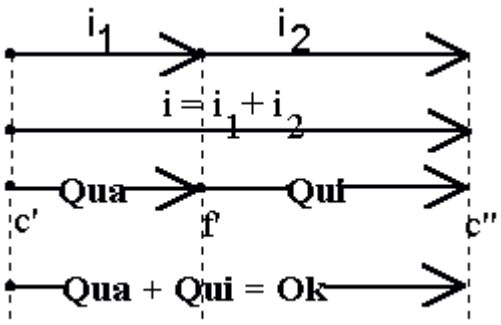
Was bedeutet das?

Nun: Das erste Intervall kann durch zwei Töne A und B beschrieben werden. Das zweite ebenfalls durch zwei Töne, wobei wir als ersten Ton B wählen können. Also:

Erstes Intervall i_1 = AB. In unserem Beispiel etwa Qua = c'f'.		Quarte
Zweites Intervall i_2 = BC. In unserem Beispiel dann Qui = f'c''.		Quinte

Nun führen wir die Intervalle hintereinander aus und lassen den Ton B unberücksicht.

Neues Intervall i = AC. In unserem Beispiel i = c'c''.		Oktav

Wir haben also eine "Verknüpfung" von Intervallen, die wir unserer Vorstellung gemäß wie das Zusammensetzen von Strecken vorstellen können und die wir deshalb als **Addition** schreiben.

i_1 = AB und i_2 = BC => i = i_1 + i_2 = AC.
In unserem Beispiel also Qua + Qui = Okt.



Bei der **Addition** von Intervallen werden die zugehörigen Frequenzverhältnisse **multipliziert**.

Beispiele:

G + Qua = Qui	$\frac{9}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{3}{2}$
G + kSept = Ok	$\frac{9}{8} \cdot \frac{16}{9} = 2$
kT + gT = Qui	$\frac{6}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{2}$
gT + Qua = gSext	$\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$
gT + Qui = gSept	$\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{8}$
gT + kSext = Ok	$\frac{5}{4} \cdot \frac{8}{5} = 2$
Qua + Quin = Ok	$\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 2$

Die Umkehrung der Addition ist die Subtraktion.

> Beispiel: Welches Intervall x muss ich zur Quarte addieren, um die Oktav zu erhalten?
> Qua + x = Ok.
>
> Nach Definition nennt man dieses Intervall die Differenz: x = Ok - Qua.
>
> Hier: Ok - Qua = Qui.

Hörpsychologisch geht man zuerst ein Intervall aufwärts und dann ein Intervall abwärts.

Entsprechende Frequenzverhältnisse werden dividiert.

Damit sind auch zum Beispiel folgende Beziehungen verständlich:

Ok - Qua = Qui	$2 : \frac{4}{3} = \frac{3}{2}$
Ok - Qui = Qua	$2 : \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$
Qui + Qui - Ok = G	$\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} : 2 = \frac{9}{8}$

Satz: Die Oktave Ok, die Quinte Qui und die große Terz gT sind die Grundintervalle der reinen Stimmung.

Deshalb nennt man dieses System auch das **Quint-Terz-System**

Das heißt: Alle in Lektion 1 erwähnten Intervalle kann man damit zusammensetzen.

Beweis :

Die Oktave	Ok Grundintervall
Die Quinte	Qui Grundintervall
Die Quarte	Qua = Ok - Qui
Die große Terz	gT Grundintervall
Die kleine Sext	kSext = Ok - gT
Die kleine Terz	kT = Qui - gT
Die große Sext	gSext = Ok - (Qui -gT) = Ok + gT - Qui
Der große Ganzton	G = Qui + Qui - Ok
Der kleine Ganzton	G- = gT - G = Ok + gT - Qui - Qui
Die kleine Septime	kSept = Ok - G = 2Ok - 2Qui
Die kleine Septime	kSept+ = Ok - (G-) = Qui + Qui - gT
Der Halbton	H = Qua - gT = Ok - Qui -gT
Die große Septime	gSept = Ok - H = Qui + gT

Mit diesen Intervallen kann man die reine Dur- und Molltonleiter aufbauen.

Reine Tonleiter heißt: Die Dreiklänge der Tonika, Dominante und Subdominante sind aus reinen großen und kleinen Terzen aufgebaut.

Zum Beispiel berechnen sich in der C-Durtonleiter mit dem Grundton c' mit 264 Hz die übrigen Töne mit ihren Frequenzen folgendermaßen:

Ton + Intervall	Berechnung der Frequenz Bemerkung
c' + gT = e'	264·5/4 = 330
e' + kT = g'	330·6/5 = 396
g' + gT = h'	396·5/4 = 495
h' + kT - Ok = d'	495·6/5:2 = 297
c' + Ok = c''	264·2 = 528
c'' - kT = a'	528:(6/5) = 440
a' - gT = f'	440:(5/4) = 352

Zur C-Dur-Tonleiter gehören folglich folgende Frequenzen:

c'	d'	e'	f'	g'	a'	h'	c''
264	297	330	352	396	440	495	528

Entsprechend kann man die c-Moll-Tonleiter so berechnen, dass die Mollakkorde c'es'g', g'b'd'' und f'as'c' aus kleiner Terz und großer Terz aufgebaut sind.

Zur C-Moll-Tonleiter (harmonisch absteigend) gehören folglich folgende Frequenzen:

c'	d'	es'	f'	g'	as'	b'	c''
264	297	316,8	352	396	422,4	475,2	528

---

3. Lektion

3. Lektion: Beschreibung von Tonsystemen ohne Akustik, rein hörpsychologisch

Bisher haben wir Töne und Intervalle durch Frequenzen und Frequenzverhältnisse beschrieben, aber doch schon die Grundlagen gelegt, um ohne diese Begriffe auszukommen.

Es gibt zwei wichtige Gründe, die Theorie möglichst ohne Bezug auf die Akustik zu formulieren:

Die Anschaulichkeit und die **Interpretation historischer Tonsystembeschreibungen**.

Zwischen dem musikalischen Sachverhalt und der Akustik ist ein ständiger Übersetzungsvorgang nötig, der Theorien umständlich und unanschaulich macht, und bei geschichtlichen Betrachtungen Zusammenhänge vorwegnimmt, die damals noch nicht erforscht waren. Wir wollen nur mit **musikalischen Begriffen** auskommen.

Hier wird ein vereinfachtes Tonsystem nur mit dem Begriffen "Ton" und "Intervall" verwendet, wie es ähnlich Wilfried Neumaier beschreibt. Es kommt ohne den Begriff der reellen Zahlen aus.

Eine exakte Beschreibung findet sich im Anhang der Abhandlung Axiomensystem.

Man hat einen Tonvorrat (=**Menge von Tönen**), zum Beispiel: ..., c', d', e', f', ... und
eine **Menge von Intervallen** zum Beispiel: Oktave, Quinte, große Terz, ...

Töne und Intervalle sind miteinander verknüpft.

1. Zwei Töne bestimmen jeweils ein Intervall, zum Beispiel (gleich in der passenden Beschreibung):
   gT = c'e' (gT ist die Abkürzung für große Terz, siehe Lektion 1)
   Qui = c'g' (Qui ist die Abkürzung für die Quinte) ...

2. Umgekehrt gibt es zu jedem Ton und zu jedem Intervall genau einen zweiten Ton, so dass die zwei Töne gerade dieses Intervall ausmachen. Zum Beispiel (gleich in der passenden Beschreibung):
   c' + Qui = g', da Qui = c'g'.

3. Intervalle kann man **addieren** (hintereinander ausführen. Siehe Lektion 2) und **subtrahieren**.

   Für diese Verknüpfung gelten die üblichen mathematischen Regeln.

   Zum Beispiel haben wir in Lektion 2 gesehen.

   gSext = Ok - kT für kT = Qui -gT, also folgt gSext = Ok - (Qui -gT) = Ok - Qui + gT = Ok + gT - Qui.

   In unserer Vorstellung denken wir uns etwa: c' + gSext = c' + Ok + gT - Qui =c'' +gT - Qui = e'' - Qui = a'.

4. Eine ganz wichtige Eigenschaft, die uns ermöglicht Intervalle zu **messen** ist der Größenvergleich:

   Tönen und Intervallen kann man in ihrer Tonhöhe bzw. Größe **vergleichen**. Zum Beispiel:
   c' < d' (Interpretation:der Ton d' erklingt **höher** als der Ton c') und
   Qua < Qui ("Das Intervall der Quarte ist **kleiner** als das Intervall der Quinte").

   Damit kann man rechnen. Zum Beispiel:
   1 Okt < 2Qui.
   Um das zu verifizieren benötigt man keine Berechnungen über Frequenzverhältnisse. Ein musikalischer Mensch **hört** diese Beziehung, etwa durch folgenden Vergleich:
   c' + Ok = c'' und
   c' + (Qui + Qui) = (c' + Qui) + Qui = g' + Qui = d''
   d'' erklingt höher als c''. Folglich ist Ok < Qui+Qui

Eines kann man jedoch nicht. Teile von Intervallen hörpsychologisch bestimmen. Zum Beispiel kann niemand ohne Taschenrechner und ohne (auf Rechnungen beruhenden) Auszählen von Schwebungen eine gleichstufige große Terz oder eine "halbe Oktave" bestimmen. (Wird in Lektion 5 oder hier erläutert).

Es hat jedoch Sinn zu schreiben:

$$\mathbf{Qui > \frac{1}{2}\,Ok \text{ (Die Quinte ist größer als eine halbe Oktave).}}$$

Die Interpretation ist: 2Qui > 1Ok.

Wie Wilfried Neumaier ausführt, kann man hörpsychologisch feststellen, dass

```
2Qui > 1Ok
5Qui < 3Ok
12Qui > 7Ok (siehe Pythagoreisches Komma: 12 Quinten übertreffen 7 Oktaven)
41Qui < 24Ok
```

Man kann also den Ort der Quinte innerhalb der Oktave immer genauer angeben:

$$\mathbf{Qui > \frac{1}{2}Ok = 0{,}5Ok}$$

$$\mathbf{Qui < \frac{3}{5}Ok = 0{,}6Ok}$$

$$\mathbf{Qui > \frac{7}{12}Ok = 0{,}583Ok}$$

$$\mathbf{Qui < \frac{24}{41}Ok = 0{,}585Ok}$$

Genauere Angaben sind vom Hören her nicht mehr möglich, nur noch theoretisch.

Die modernen Mathematik macht es uns leicht:

Qui = $lb(\frac{3}{2})$Ok = 0,5848625...Ok) (Zweierlogarithmus: siehe nächste Lektion)

(Interpretation: Die Quinte ist das 0,585-fache der Oktave)

Wir müssen nur beachten, dass der Frequenzverhältnis der Quinte $\frac{3}{2}$ ist.

Für Mathematiker:

Mit der Kettenbruchentwicklung
kann man immer bessere Brüche als Näherungswerte für $lb(\frac{3}{2})$ bestimmen
($lb(\frac{3}{2})$: siehe Lektion 4)

$lb(\frac{3}{2})$ ungefähr gleich $\frac{7}{12}, \frac{24}{41}, \frac{31}{53}, \frac{179}{306}, \frac{389}{665}, \frac{9126}{15601}, \frac{18641}{31867}, \ldots$

Jedes Intervall kann also (hörpsychologisch ungefähr, mathematisch exakt) mit der Oktave verglichen werden. Wir besitzen also einen **Maßstab** für Intervalle. Dies wird in der nächsten Lektion behandelt.

Hinweis für Mathematiker: Dieser Tonraum wird an anderer Stelle mathematisch exakt beschrieben.

Die moderne Mathematik gibt uns die Gelegenheit, solche Strukturen elegant zu studieren. Der Bezug zu den reellen Zahlen (der Maßstab für ein Intervall) kann dabei vermieden werden.

Hinweis für Nichtmathematiker: Wenn Sie gT = Qui - kT und gSext = Ok - kT = Ok - (Qui -gT) = Ok + gT - Qui interpretieren können, haben Sie genügend mathematisches Hintergrundwissen.

⇒ 4. Lektion

4. Lektion: Das Centmaß für Intervalle

Siehe auch: Erläuterung für Nichtmathematiker zu den Cent-Angaben für Tonhöhenunterschiede

Kurzgefasst wird im Folgenden erklärt:

Als Einheit wählen wir die Oktave.

Jedes Intervall kann als Vielfaches der Oktav dargestellt werden.
Zum Beispiel Qui=0,585Ok.

Die Oktave wird in 1200 Cent (12 Halbtöne) unterteilt: **1Ok = 1200Cent**.

Dann gilt zum Beispiel für die Quinte Qui=0,585Ok=0,585·1200 Cent =702Cent.

Der Zusammenhang Frequenzverhältnis zu Intervall ist ein logarithmischer.

Die **Centangabe** wird vorteilhaft bei Verstimmungen verwendet. Grob gesagt:

- Abweichung bis 10 Cent - wie bei mitteltönigen Stimmungen, bei denen nur C-Dur nahe Akkorde verwendet werden, bringen im Vergleich zur reinen Stimmung Farbe in die Musik.
- Mit 15 Cent Abweichung hat man sich schweren Herzens abgefunden. Anders könnte man auf Tasteninstrumenten nicht alle Tonleitern spielen.
- Fürchterlich klingen Verstimmungen um die 40 Cent (ein Fünftel eines Ganztones) wie zum Beispiel beim "Wolf" bei der ansonsten so herrlichen mitteltönigen Stimmung, bei Cis-Des oder bei As-Fis.

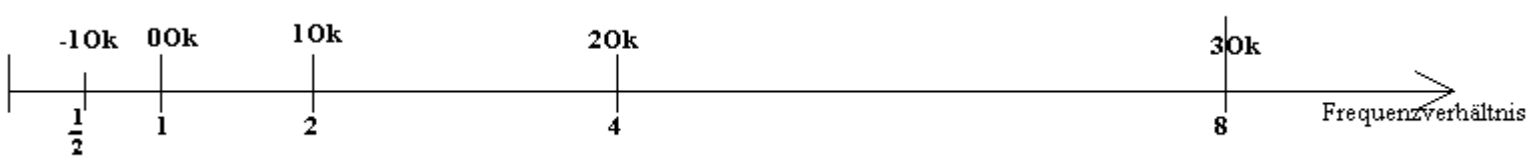
Nun Ausführlich:

In unserer Vorstellung haben zwei gleiche Oktaven, allgemein zwei gleiche Intervalle, immer denselben Abstand.

Wir sprechen von 1, 2, 3 Oktaven u.s.w. Die Frequenzverhältnisse sind jedoch 2, 4, 8 u. s. w.

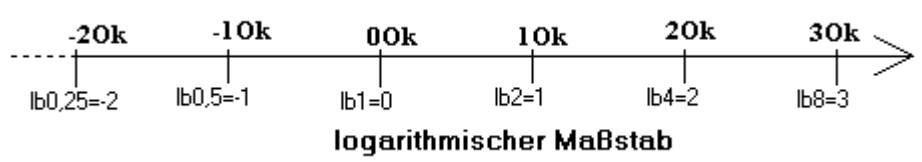
Veranschaulichung der Frequenzverhältnisse im Gegensatz zu unserer Vorstellung:

Maßstab: Frequenzen:




```
Interpretation: -1Ok: Eine Oktave tiefer (Frequenzverhältnis 1:2)
                 0Ok: Prim               (Frequenzverhältnis 1:1)
                 1Ok: Eine Oktave höher  (Frequenzverhältnis 2:1)
                 2Ok: Zwei Oktaven höher (Frequenzverhältnis 4:1)
                 3Ok: Drei Oktaven höher (Frequenzverhältnis 8:1)
```

Maßstab: Unser Höreindruck (das Weber-Fechnersche Gesetz):



Mit der Bezeichnung: lb ist der Logarithmus zur Basis 2 und der Feinunterteilung: 1Ok = 1200Cent)

$$\text{Intervall} = lb(\text{Frequenzverhältnis}) \cdot Ok$$

$$y = lb(x)Ok = lb(x) \cdot 1200Cent$$

(Das Intervall y als Teil der Oktave Ok in Abhängigkeit vom Frequenzverhältnis x)

Zum Beispiel ist das Frequenzverhältnis von 3 Okaven $x = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ und damit das Intervall $y = lb(8)Ok = 3Ok$ (muß ja so sein!).

Begründung:lb(8) ist der Zweierlogarithmus von 8, also die Zahl, mit der ich zwei potenzieren muß, um 8 zu erhalten, somit lb(8) = 3. Der Zweierlogarithmus macht das Potenzieren rückgängig.

Allgemein ist der Zweierlogarithmus lb(x) als die Zahl definiert, mit der man zwei potenzieren muß, um x zu erhalten:

$y=lb(x) \Leftrightarrow 2^y = x$ Der Zweierlogatithmus und die Potenzen zur Basis 2 sind als Funktionen betrachtet **Umkehrfunktionen** von einander.

Ausführlicher: siehe Einführung in den Logarithmus.

Jedes Intervall wird nun auf die Oktav bezogen mit dem Maß Cent.

Zum Beispiel:

1 Ok = 1 200 Cent
2 Ok = 2 400 Cent
3 Ok = 3 600 Cent
...
Das Frequenzverhältnis von einer, von zwei, von drei, ... Oktaven ist 2,4,8 ...
Mit den Beziehungen 1 = lb(2), 2 = lb(4), 3 = lb(8), ... können wir deshalb auch schreiben:

1 Ok = lb(2)·1200 Cent
2 Ok = lb(4)·1200 Cent
3 Ok = lb(8)·1200 Cent.

Die übrigen Intervalle berechnen sich dann entsprechend:

$$\text{Qui} = \text{lb}\left(\frac{3}{2}\right)\cdot 1200 \text{ Cent} = 702 \text{ Cent}$$

$$\text{Qua} = \text{lb}\left(\frac{4}{3}\right)\cdot 1200 \text{ Cent} = 498 \text{ Cent}$$

...

Bemerkung:

In der gleichförmigen Stimmung mit dem Halbton h = 100 Cent gilt:
Qui(gleichstufig) = 7 h = 700 Cent und
Qua(gleichstufig) = 5 h = 500 Cent.

Die feinen Unterschiede zwischen reiner und gleichstufiger Stimmung werden in Lektion 5 erklärt.

Noch ein Beispiel:

gT = lb(5/4)Ok = 0,321 928Ok = 0,321 928·1200 Cent = 386 Cent

Mit gT = 0,321 928Ok wird zum Ausdruck gebracht:
Die große Terz ist das 0,321 928-Vielfache der Oktave.
Grob abgeschätzt: Die **große Terz ist** ungefähr **ein Drittel einer Oktav**, da drei große Terzen aufeinandergetürmt ungefähr eine Oktave ergeben.

Da 1 Oktave = 1200 Cent umfaßt, ist mit dem feinen Maß Cent ausgedrückt:
gT = 0,321 928·1200 Cent = 386 Cent (gerundet).

Der große Nachteil ist, dass die Reinheit von Intervallen, deren Frequenzverhältnis einfache Verhältnisse sind, in der Centschreibeweise nicht erkennbar ist, der Vorteil ist ihre gute Vergleichbarkeit.

Bemerkung: In dem Werk "Teilung des Kanons" (siehe 6. Lektion) addiert Euklid die Intervalle Qua+Qui=Ok und bemerkt dazu, dass dies der Multiplikation der Verhältnisse (4:3)·(3:2) = (2:1) entspricht.

Er wußte auch, dass die Qui ungefähr der 7/12-te Teil der Oktave ist (12 Quinten fast gleich 8 Oktaven). Er kannte noch keine Dezimalzahlen (7/12 = 0,583) und noch keine Logarithmen (lb(3/2)=0,585).

Wenn wir Qua + Qui = 498 Cent + 702 Cent = 1 200 Cent, oder etwas genauer
Qua + Qui = 498,044 999 135 Cent + 701,955 000 865 Cent = 1 200 Cent, schreiben, wird nicht einmal erkennbar, dass das zugehörige Zahlenverhältnis rational ist.
Die Probe:

$$2^{498{,}044\ 999\ 135 \text{ Cent}} = 2^{498{,}044999135/1200} = 1{,}333\ 333\ 333$$

zeigt uns ebenfalls nicht mit absoluter Sicherheit, dass das Verhältnis 4/3, also die Quart, dahinter steckt.

Vom Höhren her ist Qui=lb(3/2)Ok (Interpretation Qui = 0,585-te Teil der Oktave) nicht nachvollziebar, da lb(3/2) irrational ist. Das heißt: Es gibt kein gemeinsames kleineres Intervall, dessen Vielfaches die Oktave und ein anderes Vielfaches die Quinte ist.

Allgemein gilt: Vom Hören her kann man Intervalle nicht beliebig teilen. Ich kann nur feststellen, ob Vielfache eines Intervalls größer als Vielfache eines anderen Intervalls sind und damit Intervalle äußerst genau vergleichen.

Durch die geniale pythagoreische Zuordnung von Intervallen zu Verhältnissen wurde die Vergleichbarkeit mathematisiert.

Auch für uns "moderne" Menschen ist die Aussage Qui = lb(3/2)Ok unwesentlich. Wir können damit allenfalls musikalische Aussagen besser nachrechnen.

Berechnung von Frequenzverhältnissen

Wie kann ich nun umgekehrt aus Intervallen als Teil der Oktave die Frequenzverhältnisse wieder berechnen?

1. Beispiel: Welches Frequenzverhältnis x hat das Intervall y=7 Oktaven?

Lösung: Wir müssen die Gleichung y=lb(x)=7 nach x auflösen.

Erinnern wir uns:

$y=\text{lb}(x) \Leftrightarrow 2^y = x$. Auf unser Beispiel angewandt: $7 = \text{lb}(x) \Leftrightarrow 2^7=x$.

Somit gilt für das Frequenzverhältnis x von 7 Oktaven: $x = 2^7=128$.

2. Beispiel: Welches Frequenzverhältnis x hat das Intervall y = gT = 0,322Ok?

$$\text{Lösung: } \text{lb}(x)=0{,}322 \Leftrightarrow x=2^{0{,}322}=1{,}25 = \frac{4}{5} \text{ (Frequenzverhältnis der großen Terz)}$$

Wir haben hier mit Näherungswerten gerechnet. Die exakte Rechnung lautet:

$$5$$

$y=lb(\frac{5}{4}) = lb(x) \Rightarrow x = 2^{lb(\frac{5}{4})} = \frac{5}{4}$.

Allgemein gilt: $lb(2^y) = y$ und $2^{lb(x)} = x$.

3. Beispiel Wir wiederholen das 2. Beispiel, diesmal jedoch im Centmaß:

Welches Frequenzverhältnis x hat das Intervall y = gT = 386Cent?

Lösung: Wir müssen zunächst durch 1200 dividieren, da 1Ok = 1200 Cent sind.

$y=lb(x)Ok=lb(x)\cdot 1200Cent=383Cent \Rightarrow lb(x) = \frac{386}{1200} = 0{,}322$

und damit wieder $x = 2^{0{,}322} = 1{,}25 = \frac{5}{4}$

Allgemein:

Aus dem Centmaß y = lb(x)·1200 Cent berechnet sich das Frequenzverhältnis über die Umformung

$lb(x) = \frac{y}{1200Cent}$ zu $x = 2^{\frac{y}{1200\ Cent}}$

Beispiel: a) $y = 702\ Cent \Rightarrow x = 2^{\frac{702}{1200}} = 1{,}500\ 038$

Ohne Rundungsfehler wäre $x = \frac{3}{2}$, also y = reine Quinte.

b) y = 400 Cent (die große Terz bei der gleichstufigen Stimmung)

$\Rightarrow x = 2^{\frac{400}{1200}} = 2^{\frac{1}{3}} = 1{,}25992$ (auf 5 Dezimalen gerundet)

Das Frequenzverhältnis ist irrational, kann also nicht als Bruch angegeben werden.

Überlegungen zum Zweierlogarithmus für Mathematiker und Informatiker.

⇒ 5. Lektion

5. Lektion: Die gleichstufige Stimmung

Die reine Stimmung hat den großen Vorteil "schöner" Zusammenklänge, aber den Nachteil, dass bei Modulationen sich "unschöne" Akkorde ergeben. In Lektion 2 wurde die C-Dur-Tonleiter berechnet:

c'	d'	e'	f'	g'	a'	h'	c''
264	297	330	352	396	440	495	528

Die Dur-Dreiklänge von Tonika c'e'g', Dominante g'h'd'' und Subdominante f'a'c'' erklingen rein.

Wir können es nochmal überprüfen, indem wir die Frequenzverhältnisse berechnen:

$\frac{e'}{c'} = \frac{330}{264} = \frac{5}{4}$, $\frac{h'}{g'} = \frac{495}{396} = \frac{5}{4}$ und $\frac{a'}{f'} = \frac{440}{352} = \frac{5}{4}$ (große Terz = 386 Cent)

$\frac{g'}{e'} = \frac{396}{330} = \frac{6}{5}$, $\frac{d''}{h'} = \frac{594}{495} = \frac{6}{5}$ und $\frac{c''}{a'} = \frac{528}{440} = \frac{6}{5}$ (kleine Terz = 316 Cent)

Moduliert man dann nach F-Dur und lässt in F-Dur den Subdominantakkord bd'f' erklingen, so klingt dieser unrein.

Man sieht es hier sofort, wenn man die kleine Terz d'f' nachrechnet:

$\frac{f'}{d'} = \frac{352}{297} = \frac{32}{27}$ | (unreine kleine Terz = 294 Cent, 22 Cent Abweichung vom reinen Intervall)

Vergleichen Sie den unreinen Akkord bd'f' (unrein) mit dem reinen Akkord! bd'f' (rein in F-Dur)
Beim reinen Akkord musste der Ton d' um 22 Cent erniedrigt werden (22 Cent ist etwa 1/5 Halbton).
Bei jeder Modulation in die Dominante oder Subdominante ändern sich Töne nicht nur um einen halben Ton (h in b oder f in fis), sondern gleichzeitig auch ein Ton um 22 Cent (wie hier der Ton d'). Beim Chorgesang passen die SängerInnen die Töne vom Hören her an, bei Tasteninstrumenten ist dies nicht möglich.

Weitere Erläuterungen

Nach langen Suchen, wie man spielbare Tasteninstrumente bauen muss, kam man über mitteltönige und wohltemperierten Stimmungen schließlich zur gleichförmigen Stimmung. Bei ihr klingen alle Intervalle außer der Oktave in allen Tonarten nicht mehr rein, aber auch nicht mehr unbrauchbar.

Das ist der Kompromiss, den man bei Tasteninstrumenten machen muss, wenn alle Tonarten spielbar sein sollen.

Man muss sich hierbei jedoch klar sein, dass hörpsychologisch diese Intervalle nicht exakt zu treffen sind. Das heißt:

Zwei musikalischen Sänger können eine reine große Terz leicht intonieren, die "geschärfte" gleichförmige große Terz nur ungefähr ... eben nur als "geschärfte" - etwas größere- reine Terz. Siehe dazu auch den Abschnitt hier.

Bei der gleichstufigen Tonleiter ist die Oktave als einziges Intervall rein. Die (reine) Oktave wird in 12 gleiche Halbtöne h aufgeteilt.

1 Oktave = 1 200 Cent, ein Halbton h = 100 Cent mit dem Frequenzverhältnis

$x = 2^{\frac{100}{1200}} = 2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2}$ (Die "zwölfte Wurzel" von 2)

Dieses Frequenzverhälnis könnte man auch folgendermaßen herleiten:

Bei Intervallen wird addiert: h + h + ... + h (12 Mal) = 12h = Ok.

Bei Frequenzverhältnissen wird multipliziert; x·x·...·x (12 Mal) = x^{12} =2.

Folglich ist das Frequenzverhältnis des Halbtons h die Zahl x, deren 12. Potenz 2 ist.

Diese nennt man 12. Wurzel von 2: $x = \sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}} = 1{,}059\ 463\ ...$

Die 12 Halbtöne sind dann bezogen auf den Grundton im Centmaß:

	c'	des'	d	es'	e	f'	fis'	g'	as'	a'	b'	h'	c''	
rein	0	111	204	316	386	498	590	702	814	884	1018	1088	1200	Cent
gleichförmig	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	Cent

(Die 12 Töne der reinen Tonleiter sind die der C-Dur und c-moll-Tonleiter. Zusätzlich wurde des und fis noch so zugefügt, dass des-f und d-fis reine Terzen sind.)

Bemerkenswert beim Vergleich der gleichstufigen Stimmung mit der reinen Stimmung ist:

- Die Oktaven sind absolut rein.
- Die Quinten sind fast rein (Abweichung 2 Cent).
- Die großen Terzen sind um 14 Cent zu hoch, sie sind "geschärft".

- Die kleinen Terzen sind um 16 Cent zu tief.
- Alle Tonarten erklingen gleich (brauchbar).

Damit ist die gleichstufige Stimmung vollständig erklärt.

Diese Lektion scheint irgendwie zu kurz gefaßt. Tatsächlich wird in der gleichstufigen Stimmung alles wesentlich vereinfacht ... zu sehr vereinfacht! Zum Glück wird in unserer Noteschrift zum Beispiel noch zwischen Cis und Des unterschieden, so dass ein gewisser Blick für die feinen Unterschiede bewahrt bleibt. (Wenn aber in einer Ausgabe zum wohltemperierten Klavier im es-moll-Präludium der neapolitanische Sextakkord in E-Dur statt Fes-Dur notiert wird, wird eine Ignoranz wie bei den Zwölftönern demonstriert.)

Diese Lektionen sollen Ihnen den Blick für die feinen Unterschiede schärfen.

Hinweis: Dieser Tonraum wird an anderer Stelle mathematisch formaler beschrieben.

Anhang: Die Oktave kann hörpsychologisch nicht in zwei gleiche Intervalle geteilt werden

Wir haben schon festgestellt: Intervalle kann man addieren, also auch vervielfachen. Man kann aber Intervalle nicht beliebig hörpsychologisch teilen.

Die Oktave umfaßt 1200 Cent. Die halbe Oktave also 600 Cent.

In der gleichstufigen Stimmung bedeutet dies für folgende Intervalle:
hf = eine verminderte Quinte = 600 Cent (Frequenzverhältnis irrational).
fh = übermäßige Quarte = 600 Cent.

Dieses Intervall kann kein Mensch (auch kein musikalischer) exakt treffen, es sei denn, er hört es zuvor (vom gleichstufig gestimmten Klavier) und singt es nach dem Gedächtnis.

Wir wollen im folgenden den "Tritonus" in der reinen Stimmung darstellen:
(Gerechnet wird mit dem Halbton H = 112 Cent, dem großen Ganzton G = 204 Cent und dem kleinen Ganzton G- = 182 Cent).

In C-Dur ist die verminderte Quinte hf= H + G + (G-) + H = **610 Cent** (Frequenzverhältnis = 64/45)
und die übermäßige Quarte fh = G + (G-) + G = **590 Cent** (Frequenzverhältnis 45/32).

Die Differenz ist H + H - G = 20 Cent (Frequenzverhältnis 2048/2025).

In der pythagoreischen Stimmung beträgt der Tritonus G + G + G = **612 Cent** (Frequenzverhältnis 729/512).

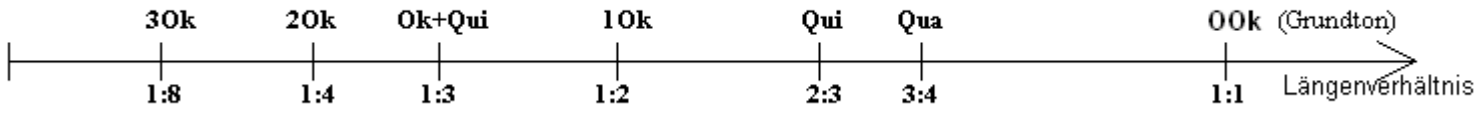
Man sieht hier übrigens, wie nichtssagend Frequenzverhältnisse, aber wie aussagekräftig die Centangabe ist.

⇒ 6. Lektion

6. Lektion: Das pythagoreische und syntonische Komma

Jetzt, wo in der Überschrift das Stichwort gefallen ist, wird eine historische Bemerkung fällig.

Pythagoras von Samos (5. Jh. v. Chr.) war der Auffassung: "Alles ist Zahl" und dies bestätigte sich in der Musiktheorie aufs beste. Pythagoras experimentierte auf dem Monochord, bei dem über einem quaderförmigen Resonanzkörper eine Saite gespannt ist, die an einem Ende fest verankert und am anderen Ende über eine feste Rolle mit einem Gewicht belastet ist, dadurch also immer die gleiche Spannung hat. Mit einem beweglichen Steg konnte er die Saitenlänge verändern. Ganz im Sinne der **Experimentalphysik**, die eigentlich erst mit Galileo Galilei (1564-1642) begann, untersuchte Pythagoras die Tonhöhe in Abhängigkeit von der Saitenlänge und fand dabei heraus - wie Euklid 300 vor Christus in seiner Schrift "**Teilung des Kanons**" erläutert:



Seine Vehältniszahlen sind die Kehrwerte der Frequenzverhältnisse. Um die Lektionen einheitlich zu gestalten, nehmen wir uns die Freiheit und drehen die Verhältnisse um.

Der Quart	entspricht das Verhältnis	4:3
Der Quint	entspricht das Verhältnis	3:2
Der Oktav	entspricht das Verhältnis	2:1
Der Quint+Oktave	entspricht das Verhältnis	3:1
Der Doppeloktave	entspricht das Verhältnis	4:1

Des Weiteren fand er heraus, dass dem Nacheinanderausführen zweier Tonschritte die Multiplikation der entsprechenden Verhältniszahlen entspricht. Er konnte also Berechnungen über Intervalle - wie wir mit Hilfe der Akustik - mit Hilfe der Verhältniszahlen durchführen.

So folgerte er: Dem Ganzton als Differenz von Quint und Quart entspricht das Verhältnis 9:8.

Und: **Die Oktave ist kleiner als 6 Ganztöne**. Den Unterschied zwischen Oktav und 6 Ganztönen nennen wir das pythagoreische Komma.

Da für den Ganzton gilt: G =2·Qui - Ok ist Ok < 6G gleichbedeutend Ok < 12Qui - 6Ok oder 7Ok < 12Qui. In dieser Weise wird das pythagoreische Komma meist erläutert.

Das pythagoreische Komma

Geht man von c 12 Quinten nach oben und 7 Oktaven zurück, so landet man bei einem Tasteninstrument auf dem selben Ton c. In Wahrheit handelt es sich jedoch um His.

Die 12 Töne der Quintenfolgen sind:

c g d' a' e'' h'' fis''' cis'''' gis'''' dis''''' ais''''' eis''''' his'''''

7 Oktaven zurück:

his''''' his''''' his'''' his''' his'' his' his His

Der Unterschied zwischen His und c wird als pythagoreisches Komma bezeichnet. Genauer:

pythagoreische Komma = 12Qui - 7Ok

$$\text{Das Frequenzverhältnis ist } q = \left(\frac{3}{2}\right)^{12} : 2^{7} = \frac{531441}{524288} = 1{,}013\ 643\ 265$$

oder - und hier sieht man den Vorteil der Centangabe - pythagoreische Komma = lb(q) = 23,46 Cent, ungefähr ein Fünftel Halbton (h = 100 Cent).

pythagoreische Komma= 23,5 Cent

Historische Bemerkung: Von **Aristoxenos** (2. Hälfte des 4.Jh. v. Chr.), ein scharfer Logiker, ist die früheste Tonsystemtheorie mit dem Titel "Harmonische Elemente" in Fragmenten überliefert (siehe Neumaier). Aristoxenos argumentierte rein hörpsychologisch, er verwendete keine Verhältnisse. Er stellte durch Hören fest, dass die Quarte zweieinhalb Ganztöne beträgt (was nur fast stimmt) und konnte damit logische eine in sich stimmige Theorie aufbauen. Euklid deckt den Fehler auf: "Die Quarte ist kleiner als zweieinhalb Ganztöne".

Genauer: Aristoxenos machte einen **Hörtest** und behauptete: Qua - 2G + Qua - 2G + Qua sei eine Quinte = Quarte + Ganzton und folgerte aus 3Qua - 4 G = Qua + G, dass 2Qua = 5G, also Qua = 2 1/2G.

$$\text{Rechnen wir nach: } 3\text{Qua}-4\text{G} = 3\,\text{lb}\left(\frac{4}{3}\right) - 4\,\text{lb}\left(\frac{9}{8}\right) = 678{,}495 \text{ Cent}$$

Der Vergleich mit der Quinte Qui = 701,955 Cent ergibt als Differenz 23,46 Cent. Aristoxenos "verhörte" sich exakt um das pythagoreische Komma.

Eine Bemerkung zu His = c (angeblich): Das His wie oben durch 12 Quinten - 7 Oktaven bestimmt, kommt normalerweise so in Modulationen gar nicht vor, es sei denn, man stimmt sein Instrument nur mit reinen Quinten. Dann ist der Unterschied zwischen c und His tatsächlich das pythagoreische Komma.

Wir begeben uns nun aber in die Betrachtungsweise der reinen Stimmung.

Schon in der Quintenreihe c g d' a' (alles reine Quinten) ist dieses a' kein a der C-Dur-Tonleiter mehr, da das Intervall ga' in C-Dur ein kleiner Ganzton ist. Nur in G-Dur ist g'a' ein großer Ganzton.

Suchen wir ein passendes His! Zum Beispiel bei der Modulation C-Dur über E-Dur nach cis-moll.

Cis-moll hat noch das e von C-Dur. Von c = 0 Cent aus gerechnet: e = 386,314 Cent.
Eine kleine Terz (gT = 315,641 Cent) tiefer ergibt: Cis = 70,672 Cent.
His wäre ein Halbton tiefer (H = 111,731 Cent): His = - 41,059 Cent (Frequenzverhältnis 125/128).
Das ist fast ein halber Halbton zu tief im Vergleich zu c! Diese Differenz besteht auch zwischen Cis und Des.

Eine Bemerkung zur **pythagoreischen Tonleiter**: Bis in die Renaissance ist von Tetrachorden, Tongeschlechtern bzw. Kirchentönen die Rede. Unter diesen Betrachtungen kann man *eine* Aufeinanderfolge von Tönen als die diatonische (=Dur-)Tonleiter finden.

Erst mit der Mehrstimmigkeit erkannte man, dass die große Terz (386 Cent) viel wohlklingender ist als der Ditonos (Ditonos = 2 große Ganztöne = 408 Cent). In der folgenden Tonleiter kommt die große Terz nicht vor.
Die pythagoreischen Tonleiter hat folgende Intervalle zum Grundton:

G, 2G, Qua, Qui, Qui+G, Qui+2G und Ok. Übersetzt in die C-Dur-Tonleiter erhalten wir im Vergleich:

	c	d	e	f	g	a	h	c'	
rein	0	204	386	498	702	884	1088	1200	Cent
pythagoreisch	0	204	408	498	702	906	1110	1200	Cent
gleichstufig	0	200	400	500	700	900	1100	1200	Cent

Fachleute bestätigen den Wohlklang dieser Tonschritte beim einstimmigen Singen.

In der pythagoreischen Stimmung fällt auf:

Die "große Terz" ce, genauer der **Ditonos** ist "geschärft" (um 22 Cent größer als die reine Terz).
Der "Halbton" ef bzw. hc, genauer das **Leimma** ist "eng" (um 22 Cent kleiner als der reine Halbton).
Sie hat Ähnlichkeiten mit der gleichstufigen Stimmung.

Zum Nachschlagen:

Intervall	Frequenzverhältnis	in Cent
reine große Terz = G + (G-)	4:3	386
Ditonos = 2G	81:64	408
reiner Halbton	16:15	112
Leimma = Quart - 2G	256:243	90

Das syntonische Komma (Terzkomma)

Unter dem syntonischen Komma, auch Terzkomma genannt, versteht man die Differenz zwischen 2 großen Ganztönen und der großen Terz.

Anders ausgedrückt ist das syntonische Komma der Unterschied zwischen Ditonos und großer Terz.

K = syntonisches Komma = 2G - gT

Das ist genau der Unterschied zwischen dem großen Ganzton und dem kleinem Ganzton.

K = G - (G-) oder G- = G - K

Berechnung des Frequenzverhältnisses: $\frac{9}{8}\cdot\frac{9}{8}:\frac{5}{4} = \frac{81}{80}$

In Cent: 2·lb(9/8) - lb(5/4) = lb(81/80) = 21,5 Cent

K = 21,5 Cent

Mit Aufkommen der Mehrstimmigkeit erkannte man allmählich den Wohlklang der reinen Terz. Der Ditonos dagegen wurde als Dissonanz vermieden. Und nun begann ein Umschwung:

In der Durtonleiter lies man den dritten Ton zum Grundton als reine Terz erklingen. Dieser dritte Ton, und ähnlich der 6. und 7. Ton, musste deshalb im Vergleich zur pythagoreischen Tonleiter gerade um das syntonische erniedrigt werden.

Diese Stimmung (siehe oben) heißt die **reine Stimmung**.

Die Tonleiter der reinen Stimmung ist so gestimmt dass bei der Kadenz mit Tonika, Dominante und Subdominante (in C-dur die Akkorde ceg, afc und ghd) rein erklingen, d.h. nur reine Quinten, große und kleine Terzen vorkommen.

Da der 3., der 6. und der 7. Ton der Tonleiter um das syntonische Komma erniedrigt werden müssen (im Vergleich zur pytagoreischen Tonleiter), wird von Theoretikern häufig die reine C-Dur-Tonleiter folgendermaßen geschrieben:

c d e f g a h c' (der 3., 6. und 7. Ton unterstrichen).

Damit wird angedeutet, dass cg, fc', gd' reine Quinten und ce, fa und gh reine große Terzen sind. In der Quintenfolge "f c g d a e h" muss also e, a und h um ein syntonisches Komma erniedrigt werden, was durch den Unterstrich angedeutet werden soll.

Ich selbst und das Programm TTMusik verwenden diese Schreibweise nicht. Hier ist die Frage wichtig: "wie verändern sich die Töne bei Modulationen". Das ist das Thema der nächsten Lektion. Dort hat sich eine andere Notation bewährt.

---

7. Lektion

7. Lektion: Modulationen

Bei der reinen Stimmung sind folgende Tonschritte einzuhalten:

Dur-Tonleiter	G	G-	H	G	G-	G	H	Intervall
	9/8	10/9	16/15	9/8	10/9	9/8	16/15	Frequenzverhältnis
	204	182	112	204	182	204	112	Cent
Moll-Tonleiter[1]	G	H	G-	G	H	G	G-	Intervall
	9/8	16/15	10/9	9/8	16/15	9/8	10/9	Frequenzverhältnis
	204	182	112	204	182	204	112	Cent

1) Hier ist die Molltonleiter im Sinne von "melodisch absteigend" aufgeführt, im Gegensatz zu "melodisch" oder "harmonisch aufsteigend".

Bezeichnung: G=204 Cent = großer Ganzton, G-= G - K = 182 Cent = kleiner Ganzton, wobei mit K = 22 Cent das syntonische Komma bezeichnet wird und mit H = 112 Cent der syntonische Halbton.

Die C-Dur Tonleiter hat also folgende Frequenzen:

c	d	e	f	g	a	h	c'	d'	e'	f'	g'	a'	h'	c''	d''	e''	f''	g''	a''	h''	c'''
132	148,5	165	176	198	220	247,5	264	297	330	352	396	440	495	528	594	660	704	792	880	990	1056

Die Frequenzverhältnisse entsprechen der Dur-Tonleiter, wie man durch Nachrechnen überprüfen kann:

$\frac{148,5}{132} = \frac{9}{8}$, $\frac{165}{148,5} = \frac{9}{10}$, $\frac{176}{165} = \frac{16}{15}$ ...

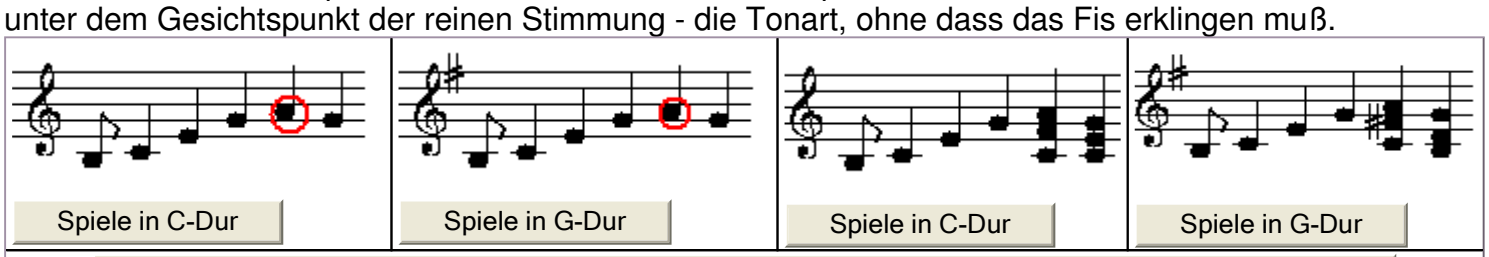
Vergleichen wir damit nun die Frequenzen von G-Dur (Modulation zur Dominante)

g'	a'	h'	c''	d''	e''	fis''	g''
396	445,5	495	528	594	660	742,5	792

Wir sehen: f hat sich zu fis um einen Halbton, genauer um D = G - H = 92 Cent erhöht, aber auch a hat sich um ein syntonisches Komma K = 22 Cent erhöht. Im folgenden wird dieses a mit a+ bezeichnet. Häufig wird in Klammer noch d dazugeschrieben, also a+(d), um anzudeuten: Es handelt sich um eine Modulation in dominantische Richtung. Entsprechend wird bei der Modulation statt f der erhöhte Ton fis(D) mit D in Klammer geschrieben, um anzudeuten, dass sich der Ton wegen der Modulation in dominantischer Richtung um einen halben Ton erhöht hat.

Bezeichnung: d = Erhöhung um 22 Cent (a in a+ in **d**ominatische Richtung). D = Erhöhung um 92 Cent (f in fis in **d**ominantische Richtung.

Zusammenfassung: Obwohl Fis in der folgenden Melodie nicht vorkommt, klingt sie wegen des Tones a verschieden. In C-Dur hat a die Frequenz von 440Hz, in G-Dur die Frequenz von 445,5 Hz. Diese Melodie bestimmt also schon - unter dem Gesichtspunkt der reinen Stimmung - die Tonart, ohne dass das Fis erklingen muß.



Ähnlich sieht der Vergleich bei Modulation in die Subdominante aus.

f	g	a	b	c'	d	e	f
176	198	220	234,7	264	293,3	330	352

Wir sehen: h hat sich um eine halben Ton G - H in b(S) und d um ein Komma in d-(s) erniedrigt.

Bezeichnung: s = Erniedrigung um 22 Cent (d in d- in **s**ubdominatische Richtung). S = Erniedrigung um 92 Cent (h in b in **s**ubdominantische Richtung.

Wir können die groben und feinen Änderungen bei der Modulation von C-Dur in G-Dur folgendermaßen eindeutig kennzeichnen. (Dies erledigt übrigens das Programm TTMusik).

C d e f g a h c Dur
G a+(d) h c d e fis(D) g Dur (eine Quinte höher)

(Damit werden die groben, im Notenbild sichtbaren, und die feinen, im Notenbild unsichtbaren, Änderungen eindeutig gekennzeichnet.

Hier noch die Modulation von C-Dur nach F-Dur.

C d e f g a h c Dur
F g a b(S) c d-(s) e f Dur (eine Quinte tiefer)

Wir können die Modulation in die Tonart "eine Quinte höher/tiefer" auch über zwei Modulationen "eine Terz höher oder

tiefer" erreichen. Das sind dann jeweils die Tonarten der Moll- bzw. Durparallelen.

C d e f g a h c Dur	**C-Dur**
e fis(D) g a h c d e moll (eine Terz höher)	**e-moll**
G a+(d) h c d e fis(D) g Dur (eine Terz höher)	**G-Dur**

C d e f g a h c Dur	**C-Dur**
a h c d-(s) e f g a moll (eine Terz tiefer)	**a-moll**
F g a b(S) c d-(s) e f Dur (eine Terz tiefer)	**F-Dur**

Wir erkennen: Bei Modulation um eine Terz tiefer (C-Dur in a-moll) oder um eine Terz höher (C-Dur in e-moll) ändert sich genau ein Ton. Nochmals um eine Terz nach oben oder unten moduliert ergibt sich die Modulation in die Dominante bzw. Subdominante.

In diesem Sinne kann man Modulationen nach Stufen ordnen.
Hier ein Ausschnitt aus dem Kapitel Modulationen nach Stufen geordnet.

Modulation 1. Stufe	Geänderte Töne	
C-Dur -> e-Moll	f->fis(D)	Übergang in die Paralleltonart (D=92 Cent:in Richtung Dominante)
c-Moll -> Es-Dur	f->f+(d)	Übergang in die Paralleltonart (d=22 Cent:in Richtung Dominante)
C-Dur -> a-Moll	d->d-(s)	Übergang in die Paralleltonart (s=-22Cent:in Richtung Subdominante)
c-Moll -> As-Dur	d->des(S)	Übergang in die Paralleltonart (S=-92 Cent:in Richtung Subdominante)

Der Übergang zur Paralleltonart wird hier unter dem Gesichtspunkt der reinen Stimmung als "Modulation 1. Stufe" bezeichnet, weil sich genau ein Ton ändert.

In dieser Untersuchung ist es gleichgültig, ob sich die Änderung um einen Halbton oder um ein Komma bezieht.

Und deshalb gibt es auch nicht die Bezeichnung "Übergang in die Paralleltonart der Dominante". Sinnvoller ist dafür die Bezeichnung Übergang in die Paralleltonart in Richtung Dominante.

(Genauer:
D: um einen Halbton in Richtung Dominante.
d: um ein syntonisches Komma in Richtung Dominante.)

Die Modulation 2. Stufe zur Dominante ist dann "dD" bzw. "Dd" und zur Subdominante "sS" bzw. "Ss" (siehe unten).

Im Kapitel Feinanalyse wird die "Mollparallele in Richtung Dominante" auch "dominantische Mollparallele" genant.

In den nächsten Tabellen erscheinen bei den "Übergängen" folgende Bezeichnungen für Modulationen und deren Hintereinanderausführungen. Dieses sind die Menüpunkte in TTMusik, um sich Tonleitern "ausrechnen" zu lassen.

T: Modulation 1. Stufe um eine Terz höher.
Dur-Tonleiter in moll-Tonleiter: Große Terz.
moll-Tonleiter in Dur-Tonleiter: Kleine Terz.

t: Modulation 1. Stufe um eine Terz tiefer.
Dur-Tonleiter in moll-Tonleiter: kleine Terz.
moll-Tonleiter in Dur-Tonleiter: große Terz.

Q=TT: Modulation 2. Stufe um eine Quinte höher (Zur Dominante).
q=tt: Modulation 2. Stufe um eine Quinte tiefer(Zur Subdominante).

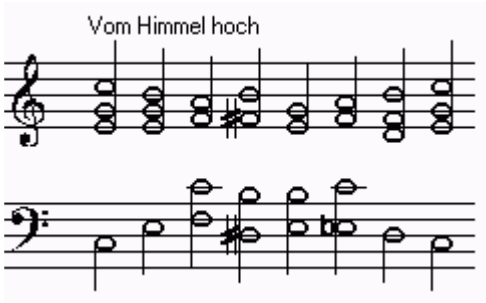
m: Modulation von Dur in Moll und umgekehrt.

Modulationen 2. Stufe:	Übergang	Geänderte Töne
C-Dur -> G-Dur	C e G(Q=TT)	f->fis(D), a ->a+(d)
c-Moll -> g-Moll	c Es g(Q=TT)	f->f+(d), as->a(D)
C-Dur -> F-Dur	C a F(q=tt)	d->d-(s), h ->b(S)
c-Moll -> f-Moll	c As f(q=tt)	d->des(S), b ->b-(s)

Jetzt wird es spannend. Haben Sie sich nicht oft schon Gedanken gemacht, wie Sie die folgenen Modulationen einordnen sollen?

Modulationen 3. Stufe:	Übergang	geänderte Töne
C-Dur -> h-Moll	C e h(TQ)=C G h(QT)	c->cis(d), f->fis(D), a ->a+(d)
c-Moll -> B-Dur	c Es B(TQ)=c g B(QT)	c->c+(d), f->f+(d), as->a(D)
C-Dur -> (d-)-Moll	C a d(tq)C F d(TQ)	d->d-(d), g->g-(s), h->b(S)
c-Moll -> Des-Dur	c As Des(tq)=c f Des(qt)	d->des(S), g->ges(S), b->b-(s)
c-Moll -> C-Dur	(m)	es->e(Ds), as->a(Ds), b->h(Ds)
C-dur -> c-Moll	(m)	e->es(Sd), a->as(Sd), h->b(Sd)

Studieren wir diesem System die folgende Harmonisierung:

```
C d e f g a h c  Dur
e fis(D) g a h c d e  moll  (eine Terz höher)
```

Spiele rein

spiele auch gleichstufig

```
   C d e f g a h c  Dur  (eine Terz tiefer)
F g a b(S) c d-(s) e f  Dur  (eine Quinte tiefer)
   C d e f g a h c  Dur  (eine Quinte höher)
   e fis(D) g a h c d e  moll  (eine Terz höher)
   (Eingerückt bedeutet: Übergang von F-Dur nach h-moll
h cis(D) d e fis(D) g a+(d) h  moll  (eine Quinte höher)
e fis(D) g a h c d e  moll  (eine Quinte tiefer)
   C d e f g a h c  Dur  (eine Terz tiefer)
   F g a b(S) c d-(s) e f  Dur  (eine Quinte tiefer)
B(S) c d-(s) es(S) f g-(s) a b(S)  Dur  (eine Quinte tiefer)
   F g a b(S) c d-(s) e f  Dur  (eine Quinte höher)
C d e f g a h c  Dur  (eine Quinte höher)
```

Man sieht: Die Melodie **c h a h g a h c** ("Vom Himmel hoch da komm ich her") ist dieselbe, als wäre sie in C-Dur harmonisiert, keine Komma geändert. Vergleicht man die übrigen Noten im Satz, dann sieht man, dass außer Dis und Es einzig im 3-letzten Akkord dd'a'h' die beiden d's um ein Komma zu d-(s) erniedrigt wurde.

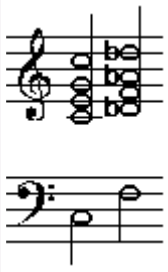
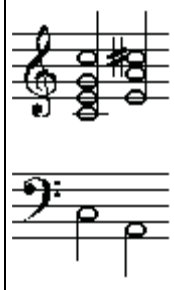
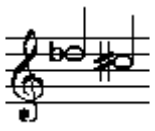
---

8. Lektion

8. Lektion: mitteltönige und wohltemperierte Stimmungen

Bei Modulationen ändern sich Frequenzen von Tönen. Zum Beispiel bei der Modulation von C-Dur nach F-Dur nicht nur h in b um einen Halbton, sondern auch d in d- um ein **syntonisches Komma**. Dass die chromatischen Töne jeweils eine andere Funktion haben, sieht man (zum Glück) schon am Notenbild, zum Beispiel ist Cis von Des verschieden.

Bei den folgenden Harmonisierungen ist Des 41 Cent höher als Cis.

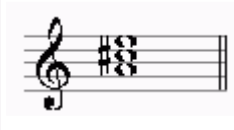
C Des	C Cis	Des Cis
C-Dur Neapolitaner 	C-Dur Doppeldoppel-dominante	
C Des (gleichstufig)	C-Dur Cis (gleichstufig)	

Im Beispiel "Vom Himmel hoch" ist der Unterschied zwisches Dis und Es "nur" 20 Cent.

Das richtig zu intonieren ist für einen Chor (oder TTMusik) kein Problem. Die SängerInnen **hören** sich in die Harmonie ein. Weitere Beispiele dazu findet man im Beitrag "As-Fis" und Passus Duriusculus

Schwierig wird es für ein Tasteninstrument, mehr als eine Tonart rein spielen zu können. In der Tat wurden im 16. Jahrhundert Tasteninstrumente mit vielerlei zusätzlichen Tasten gebaut (zum Beispiel 31 Töne in der Oktave). Spielbar waren diese jedoch kaum, technisch zu anspruchsvoll, noch mehr theoretisch, musste der Spielende doch die Funktion eines Tones ermitteln und danach die richtige Taste schlagen.

Heutzutage sind die Tasteninstrumente gleichstufig gestimmt. Und manchmal übt ein Chor nach der Klaviervorgabe und wird unsensibel für reine Akkorde. (Wenn Sie im obigen Beispiel rein und gleichstufig vergleichen und Ihnen erscheint gleichstufig richtiger, dann hat sich Ihr Gehör an die geschärfte gleichstufige Terz gewöhnt. Aber bitte achten Sie bei "C-Dur Cis" auf die Schwebungen).

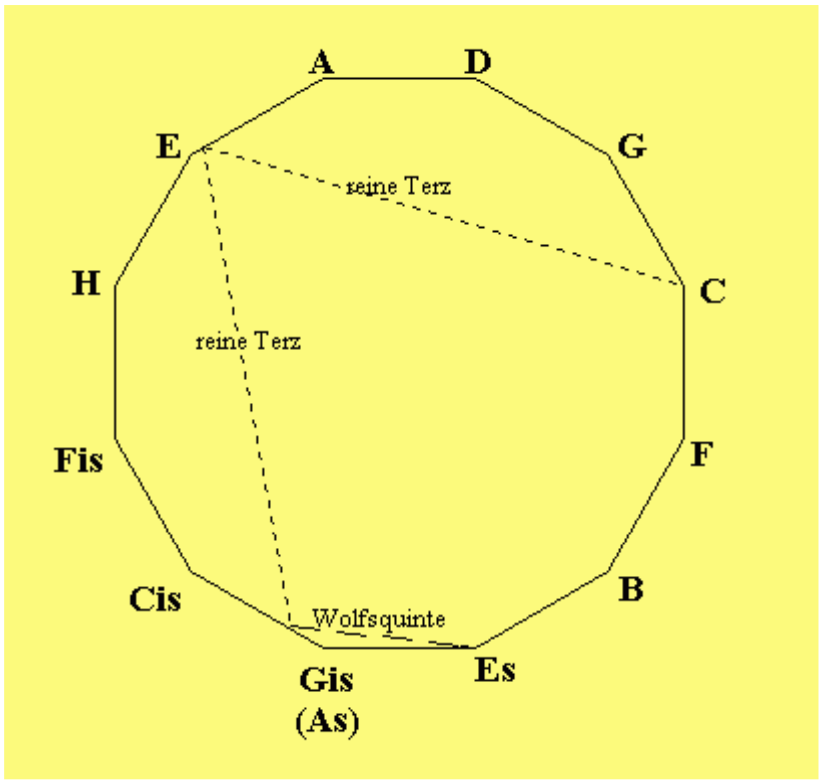
Seit einigen Jahrzehnten orientiert man sich wieder mehr an der historischen Aufführungspraxis. Daher besteht ein wachsendes Interesse an historischen Stimmungen. Orgeln gewinnen durch historische Stimmungen **mehr Farbe und harmonischen Klang**.

Hören Sie sich zunächst einmal die verschieden Stimmungen an!

	rein spielen mitteltönig gleichstufig		rein spielen mitteltönig gleichstufig

Nun zur Theorie: Da die reine Stimmung, das (**Quint-Terz-System**) auf dem Griffsystem der Lauten oder bei Tasteninstrumenten nicht zu verwirklichen ist (für "gleiche" Töne braucht man bei Modulationen eigene Tasten), versuchte man durch Abwandlung der reinen Stimmung mit möglichst wenigen Tönen auszukommen.

Als Beispiel werde die mitteltönige Stimmung von Gioseffo Zarlino (1577) erwähnt.

	Bei der mitteltönigen Stimmung wird versucht, möglichst viele reine Terzen zu verwenden. Die Quinten im Quintenzirkel werden entsprechend angepasst. (697 Cent im Vergleich zur reinen Quint mit 702 Cent). Die zwölfte Quinte wird dabei viel zu groß. Man nennt sie die "Wolfsquinte". Terzen, die nicht über die Wolfsquinte reichen, sind rein (386 Cent). Terzen über die Wolfsquinte sind deutlich verstimmt. In der Skizze ist der gleichstufige Quintenzirkel als 12-Eck gezeichnet. Das mitteltönige Gis und das (theoretische) As unterscheiden sich um 41 Cent. Für den Mathematiker: CGis(mitteltönig) = 2*gT = 8*mQ - 4*Ok = 772,6 Cent CAs(mitteltönig) = 3*Ok - 4 mQ = 813,7 Cent Differenz = 41,1 Cent (ein Fünftelton) Die Zeichnung vergröbert (entsprechend der Wahrnehmung des Gehörs):



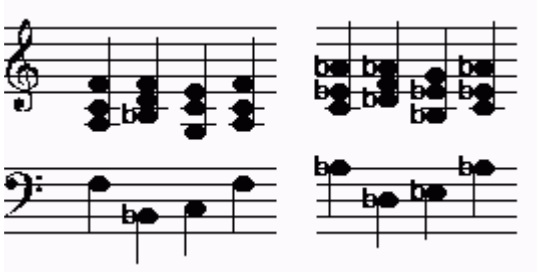
Für den Mathematiker:
Gleichstufige Quint (700 Cent) hier ≈ 20 mm
41,1 Cent ≈ 1,2 mm

Vertiefende Erläuterungen

Die Oktaven und "viele" Terzen sind rein, d.h. dieselben wie im Quint-Terz-System. Der Ganzton jedoch gemittelt zwischen großem und kleinem Ganzton (204 Cent und 182 Cent), die Quinte entsprechend angepasst (Zum Vergleich: reine Quinte = 702 Cent. Quinte des zwölfstufigen Tonraumes = 700 Cent).

Damit kann man wohltönende Tonleitern aufbauen, die Modulationen (beschränkt) ermöglichen. Allerdings ist der Quintenzirkel nicht wie beim zwölfstufige Tonraum geschlossen. Und: Modulationen in entferntere Tonlagen sind mit solch einem gestimmten Tasteninstrument nur bedingt möglich. Manche unreine Quinten zum Beispiel EsAs=EsGis wurden deshalb als "Wolf" bezeichnet.

Hörbeispiel: Kadenzen F-Dur und As-Dur



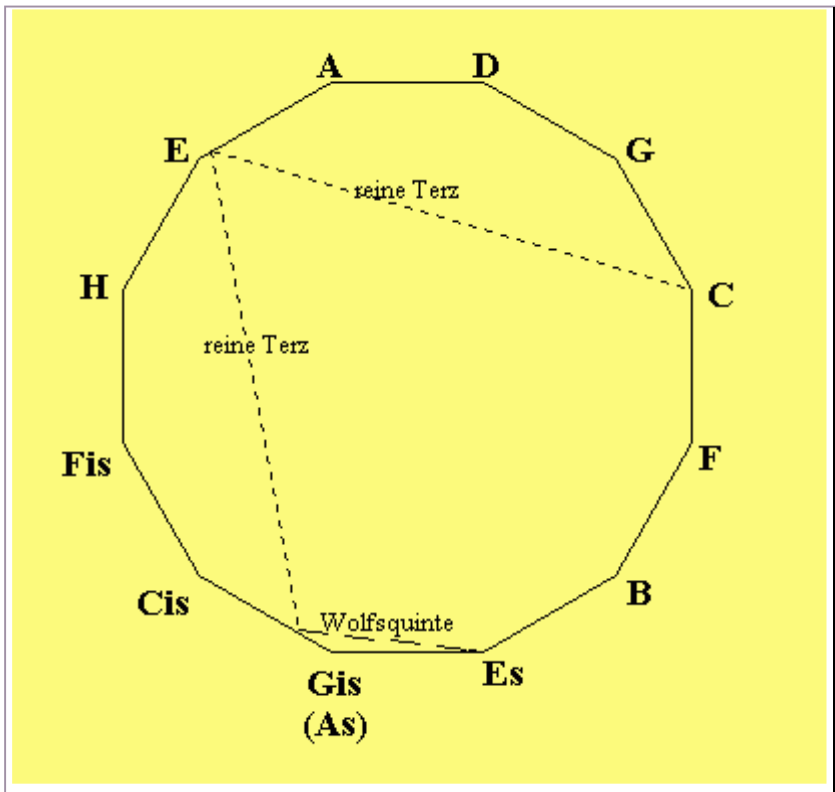
Spiele F-Dur und As-Dur

mitteltönig
(genauer "viertel mitteltönig")

wohltemperiert
(genauer Werkmeister III)

Wohltemperierten Stimmungen waren ca. 1700-1870 weit verbreitet.

Zu Johann Sebastian Bachs Zeit fand ein Umbruch zu den wohltemperierten Stimmungen statt, die es ermöglichte, in mehr Tonarten zu modulieren. Bei diesen Stimmungen erhält man eine Klangfarbenabstufung der Tonarten. Die C-Dur-nahen Tonarten klingen harmonisch, daher kraftvoll, während andere geschärft bzw. gespannt klingen. Komponisten des 18. und 19. Jahrhunderts richteten sich nach diesen Stimmungen (siehe dazu den Praktiker Reiner Jank).



Bei den wohltemperierten Stimmungen werden die Quinten unterschiedlich verstimmt mit der Tendenz zu "geschärften" Terzen. In letzter Konsequenz führte das zur gleichstufigen Stimmung.

Zunächst wurde - vereinfacht dargestellt - die zweite Terz im Quintenzirkel E-Gis geschärft (erhöht), später auch die erste, damit keine Wolfsquinten mehr auftraten.

In zahlreichen Versuchen behielt man zunächst verkleinerte Quinten (mQ = 697 Cent) bei, so dass in C-Dur nahen Tonarten die Terzen rein erklangen, ersetzte jedoch im Quintenzirkel andere Quinten durch (die im Vergleich zu 700 Cent, zur gleichstufigen Stimmung zu hohen) reine Quinten (Q = 702 Cent). Die Terzen wurden "geschärft" (erhöht), sodass die Wolfsquinte verschwand.

Bei der Diskussion über historische Stimmungen muss man sich heute stets vor Augen halten, dass es keine physikalischen Stimmgeräte gab. Man konnte leicht reine Terzen und reine Quinten stimmen. Die "verstimmten" musste man jedoch durch Auszählen von Schwebungen ermitteln. Dies wurde noch dadurch erschwert, dass sich die Schwebungen bei Intervallen in höheren Lagen erhöhen, zum Beispiel in Oktavlage verdoppeln.

⇨ Hörbeispiele und noch mehr Hörbeispiele.

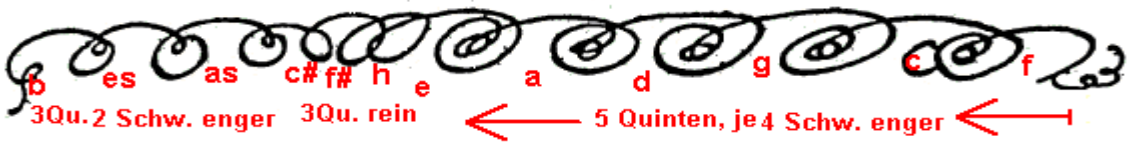
Wer sich für Berechnungen dieser Art interessiert, kann die die Tonleiter nach Kirnberger III studieren:

Mit Programm TTMusik kann man sehen, wie charakteristisch noch die einzelnen Tonarten im Vergleich zur gleichstufigen Stimmung klingen.

Anhang: Wie stimmte J. S. Bach sein Instrument?

Es wird berichtet, dass J. S. Bach sein Clavichord in weniger als 15 Minuten stimmte. Lange rätselte man, wie er seine Quinten stimmte. Es gibt hierüber von Bach selbst oder seinen Zeitgenossen keine brauchbaren Aufzeichnungen.

Andreas Sparschuh entdeckte 1998 (und berichtete 1999 bei der Jahrestagung der Deutschen Mathematiker Vereinigung darüber) , dass man die Girlande auf dem Titelblatt von Bachs wohltemperierten Klavier, I. Teil, 1722 als Stimmungsanweisung interpretieren könnte.



Es ist erstaunlich, dass man dies Jahrhunderte lang übersehen hatte.

Die Girlande kann als Vorschrift zum Stimmen des Quintenzirkels gesehen werden, war es doch damals üblich, die Quinten, die im Quintenzirkel ja angepasst werden müssen, durch Auszählung der Schwebungen zu ermitteln und die Schleifen in den Kringeln können dazu Hinweise geben.
Siehe http://bach.tuning.googlepages.com.

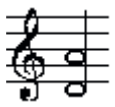
---

9. Lektion

9. Lektion: Der Akkord der 2. Stufe, die Kommafalle, der neapolitanische Sextakkord und die Doppeldominante

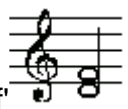
In diesem Abschnitt werden die erwähnten Tonleitern als reine Tonleitern betrachtet (nicht als gleichstufig gestimmte). Ich erinnere daran, dass bei der Modulation von C-Dur zu a-moll (Modulation 1. Stufe) der Ton d um ein Komma (genauer Terzkomma oder syntonisches Komma) erniedrigt, bei der Modulation von C-Dur zu F-Dur (Modulation 2. Stufe) ebenfalls d um ein Komma und h zu b erniedrigt wird. Ähnlich wird bei der Modulation von C-Dur zu e-moll (Modulation 1. Stufe) f in fis erhöht, bei der Modulation von C-Dur in G-Dur außer f in fis auch noch a um ein Komma erhöht wird. Dies spielt beim Akkord **d'f'a'** der 2. Stufe in C-Dur eine Rolle.

Lassen wir einmal die verminderte Quinte hf außer Acht, so sind alle Quinten der C-Dur-Tonleiter cg, eh, fc, gd und ae rein bis auf eine Ausnahme:

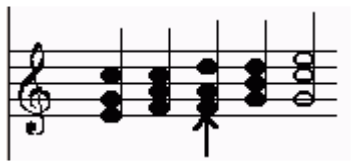
Die Quinte d'a' ist in C-Dur unrein. Das d ist um ein syntonisches Komma zu hoch. Wenn ich es erniedrige zum d der a-moll-Tonleiter oder F-Durtonleiter wird die Quinte rein.

Spiele d'a' in C-Dur und F-Dur

(Ich kann auch folgendes sagen: Die Quinte d'a' ist in C-Dur unrein. Das a ist um ein syntonisches Komma zu tief. Wenn ich es erhöhe zum a von G-Dur wird die Quinte rein.)

Ähnlich sind alle Terzen ce, eg, fa, gh, ac, hd in C-Dur rein bis auf die Ausnahme:

Die kleine Terz d'f' ist in C-Dur unrein. Mit dem d der F-Durtonleiter wird sie rein.

Spiele d'f' in C-Dur und F-Dur

Ein Chor wird danach streben, diese Intervalle rein zu singen. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder wird eine Stimme das d um ein Komma niedriger singen oder die anderen Stimmen das f und das a um ein Komma höher.

Das Problem der Subdominantparallele oder Doppel(moll)dominante. Betrifft den Akkord: F-A-D 	Der 3. Akkord ist im folgendem Beispiel unrein: F-A-D in C-Dur Alle Akkorde sind in den beiden folgenden Kadenzen rein: d" im 3. Akkord tiefer (Subdominantische Version. Der 3. Akkord gehört zu F-Dur.) f' und a' im 3. Akkord ein Komma höher (Dominantische Version. Der 3. Akkord gehört zu g-moll).

Als Chorleiter muß man darauf achten, dass das d im vorletzten Akkord, das möglicherweise im Akkord zuvor um ein Komma tiefer gesungen wurde, (wieder) hoch genug ist. Sonst tappt man in die Kommafalle.

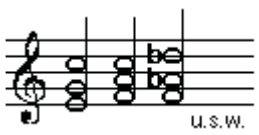
Die Kommafalle

Wird im vorhergehenden Beispiel das Sopran-d nicht nur im 3. Akkord sondern auch im 4. Akkord tiefer gesungen, dann erklingt die Dominante und der Schlussakkord zu tief. Wegen der Feinmodulation muss das "d" im 4. Akkord ein Komma höher sein wie im 3. Akkord..

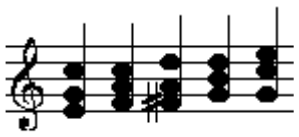
Kommafalle

	Frequenzen			in Cent		
e1gc	330	396	528	386	702	0
f1ac	352	440	528	498	884	0
f1ad-	352	440	**587**	680	884	182
g1-h-d-	391	488	**587**	680	1066	182
g1-c-e-	391	521	652	680	1178	364
("-" in TTMusik: Ein Komma tiefer)						
e1-g-c-	326	391	522	364	680	1179
f1-a-c-	348	435	522	477	863	1179
f1-a-d‗‗	348	435	579	477	863	161
g1‗‗h‗‗d‗‗	386	482	579	659	1045	161
g1‗‗c‗‗e‗‗	386	515	644	659	1157	343
(Sollfrequenz)						
g1ce	396	528	660	702	1200	386

Haben die Komponisten dies erspürt? Ich glaube aus folgendem Grunde: Ja!

Manche Kompositionen erniedrigen das d nicht nur um ein Komma, sondern um einen Halbton zum neapolitanischen Sextakkord.

spiele

d und damit a um einen Halbton tiefer

Manche Kompositionen dagegen erhöhen f' nicht nur um ein Komma, sondern um einen Halbton zur Doppeldominante.

spiele

f' um einen Halbton und damit a'

um ein Komma höher.

Wir wollen festhalten: **Der Akkord der 2. Stufe bedeutet stets eine Modulation.**

Meist wird er als Subdominantenparallele bezeichnet.

Mit gleichem Recht kann man ihn jedoch Doppeldominante (in moll) nennen.

Von der reinen Stimmung her gesehen klingen diese Akkorde sogar anders.

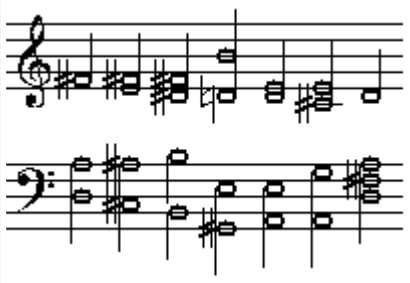
Bei einem Wechsel von Dur nach Moll in derselben Tonart kann man auch eine Kommafalle beobachten.

Noch gravierender verhält es sich bei verminderten Dreiklängen oder gar verminderten Vierklängen. Je nachdem, welche Auflösung folgt, unterscheiden sich die einzelnen Töne um ein Terzkomma.

⇨ Inhalt Lektionen

Modulation Dur-Moll in der gleichen Tonart

Wir betrachten die in der Literatur viel diskutierten Takte im "Ruhetal" von Felix Mendelsohn-Bartholdy (siehe Gratzki).

Bei den folgenden Beispielen bitte hier klicken.
Falls der Flashplayer nicht installiert ist: die grau unterlegte Beschreibung anklicken!

Spiele

Spiele Schussakkord "richtig"

Die dazugehörigen Frequenzen (mit TTMusik errechnet)

```
Akkord  Frequenzen
daf#f1# 146,67 220 366,67 366,67
c#a#ef# 137,5  229,17 325,93 366,67
Hhd#f#  122,22 244,44 305,56 366,67
G#edh   101,85 162,96 289,71 488,89
Aede    108,64 162,96 289,71 325,93
Agc#e   108,64 193,14 271,6  325,93
df#ad   144,86 181,07 217,28 289,71
richtig 146,67 183,33 220 293,33
```

Klicken Sie auf "Spiele" und anschließend auf "spiele Schlussakkord richtig", dann hören Sie, dass hier eine "Kommaverrückung" stattgefunden hat. Der letzte D-Dur-Akkord ist im Vergleich zum ersten D-Dur-Akkord ein syntonisches Komma (oder Terzkomma=21,5 Cent) tiefer.

Wir sehen dies auch an den errechneten Frequenzen. Das Erste d hat 146,67 Hz, das letzte 144,86. Es ist ein um ein Terzkomma tiefer.

Noch eine Kommafalle! Wie kommt es dazu?

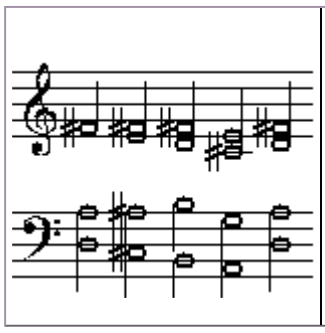
Der Grund ist folgender: Der Ton H unterscheidet sich von von D aus einmal um eine kleine Terz, das andere Mal um drei Quinten (D,A,E,H). Man spricht von

- **Terzverwandtschaft** und
- **Quintverwandtschaft**

Und: Ein Ton, der einmal über die Terzverwandtschaft, das andere Mal über die Quintverwandtschaft erreicht wird, unterscheidet sich um ein Terzkomma.

Anders betrachtet:

- h-Moll ist **terzverwandt** mit D-Dur
- H-Dur ist **quintverwandt** mit D-Dur

Vergleichen wir dazu die Modulation in die Paralleltonart und zurück:

Spiele

```
Akkord   Frequenzen
daf#f1#  146,67 220 366,67 366,67  3/2 5/3 1/1
c#a#ef#  137,5 229,17 325,93 366,67  5/3 64/45 9/8
Hhdf#    122,22 244,44 293,33 366,67  2/1 6/5 5/4
Agc#e    110 195,56 275 330       16/9 45/32 6/5
dadf#    146,67 220 293,33 366,67  3/2 4/3 5/4
```

Hier handelt es sich um die Modulation von D-Dur in die Paralleltonart h-moll und zurück. Und: Hier ist alles in Ordnung (keine Kommaverrückung!).

Die Modulation von D-Dur eine Terz tiefer zu h-moll ist die erste Stufe einer Modulation in Richtung Subdominante G-dur.

Die Frequenzen der Tonleiter ändern sich folgendermaßen:

```
D e   fis g     a   h     cis d       Dur
h cis d   e-(s) fis g     a   h       moll  (eine Terz tiefer)
G a   h   c(S)  d   e-(s) fis g       Dur  (eine Terz tiefer)
Bezeichnung: "-" Ein Terzkomma tiefer in Richtung Subdominante
Zur Verdeutlichung in Klammer: (s) eine Terzkomma tiefer in Richtung Subdominante
                               (S) Einen Halbton tiefer in Richtung Subdominante
```

Die Rückmodulation über die Dominante ist der übliche Weg.

Im ersten Beispiel erklingt nicht ein **h-moll-Akkord**, sondern ein **H-Dur-Akkord** und die Rückmodulation erfolgt über die Quintenkette H-Dur => E-Dur => A-Dur => D-Dur, so als sei nach H-Dur in dominantischer Richtung D-

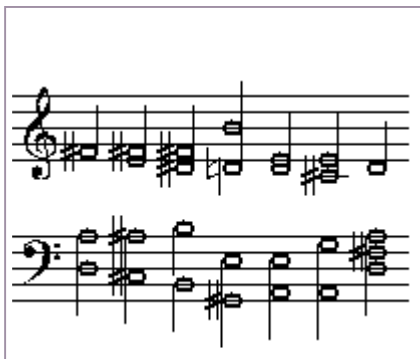
Dur => A-Dur => E-Dur => H-Dur moduliert worden. Daher die Kommaverschiebung: Eine in subdominatischer Richtung erreichte Tonart wird so behandelt als sei sie in dominantischer Richtung erreicht worden.

Kurz ausgedrückt: Die Modulation Dur in die gleiche Tonart Moll (oder umgekehrt) und zurück über eine Quintenreihe führt unweigerlich zu einer Kommaverschiebung.

Mit dem Programmpunkt "Modulationen berechnen" inTTMusik kann man die Änderungen um einen Halbton oder ein Komma der durchlaufenen Tonarten leicht "nachrechnen":

```
D e fis g  a h cis d                                  Dur
h cis d e-(s) fis g a h                               moll  (eine Terz tiefer) erklingt nicht
H cis dis-(Ds) e-(s) fis gis-(Ds) ais-(Ds) h           Dur   (Wechsel moll -> Dur)
E-(s) fis gis-(Ds) a-(s) h cis-(s) dis-(Ds) e-(s)     Dur   (eine Quinte tiefer)
A-(s) h cis-(s) d-(s) e-(s) fis-(s) gis-(Ds) a-(s)    Dur   (eine Quinte tiefer)
D-(s) e-(s) fis-(s) g-(s) a-(s) h-(s) cis-(s) d-(s) Dur  (eine Quinte tiefer)
Bezeichnung: "-" Ein Terzkomma tiefer in Richtung Subdominante
Zur Verdeutlichung in Klammer: (s) eine Terzkomma tiefer in Richtung Subdominante
                               (S) Einen Halbton tiefer in Richtung Subdominante
                               (D) Einen Halbton höher in Richtung Dominante
```

Bettina Gratzki schlägt zur Vermeidung der Kommaverrückung des Eingangbeispiels vor, den zweiten Akkord Fis-Dur mit Septime ein Komma höher zu intonieren, so als wäre dieser Akkord der H-Dur-Tonleiter über die Quintfolge D-Dur => A-Dur => E-Dur => H-Dur erfolgt.

Vergleichen Sie mit dem ersten Beispiel und achten Sie auf die Erhöhung von Fis im zweiten Akkord um ein Komma, das die Modulation in dominantischer Richtung unterstreicht.

Spiele

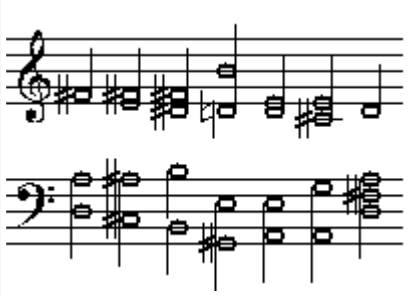
2. Akkord ff. ein Komma höher

Die dazugehörigen Frequenzen

Akkord	Frequenzen			
daf#f1#	146,67	220	366,67	**366,67**
c#a#ef#	139,22	232,03	330	**371,25**
Hhd#f#	123,75	247,5	309,38	371,25
G#edh	103,13	165	293,33	495
Aede	110	165	293,33	330
Agc#e	110	195,56	275	330
df#ad	146,67	183,33	220	293,33

Jetzt sehen die durchlaufenen Tonarten folgendermaßen aus:

```
D e fis g  a h cis d                                  Dur
h cis d e-(s) fis g a h  moll                         (eine Terz tiefer)          erklingt nicht
H+(d) cis+(d) dis(D) e fis+(d) gis(D) ais(D) h+(d)    Dur (Wechsel moll -> Dur)   mit Kommaverschiebun
E fis+(d) gis(D) a H+(d) cis dis(D) e  Dur            (eine Quinte tiefer)
A H+(d) cis d e fis gis(D) a  Dur                     (eine Quinte tiefer)
D e fis g a H cis d  Dur                              (eine Quinte tiefer)
```

Denkbar und (nach Friedhelm Waitzmann) wohl besser singbar wäre auch folgende Variation:
Der 4. Akkord wird als Doppeldominante zur D-Dur-Tonika intoniert.

Spiele

4. Akkord ff. ein Komma höher

Die dazugehörigen Frequenzen

Akkord	Frequenzen			
daf#f1#	146,67	220	366,67	366,67
c#a#ef#	137,5	229,17	325,93	366,67
Hhd#f#	122,22	244,44	305,56	366,67
G#edh	103,13	165	293,33	495
Aede	110	165	293,33	330
Agc#e	110	195,56	275	330
df#ad	146,67	183,33	220	293,33

Fazit

Der Wechsel von Dur nach Moll derselben Tonart über "Quinte, Quinte, Quinte und Parallele in Moll" ändert den Grundton um ein Terzkomma.

Das bedeutet zum Beispiel in c-moll: Der **terzverwandt**e Ton "Es" (C-Es: eine reine kleien Terz) unterscheidet sich vom **quintverwandt**ten Ton "Es" (C,F,B,Es, alles reine Quinten) um eine Terzkomma.

In C-Dur gilt Entsprechendes: Erreicht man die Große Terz, zum Beispiel von C nach E, über 5 reine Quinten (C,G,D,A,E), dann ist dieses E über den "Ditonos" **quintverwandt** zu C und nicht **terzverwandt**, also um ein Komma höher.

Ob am Schluß, mittendrin oder am Anfang der Quintenkette in die Paralleltonart moduliert wird, spielt keine Rolle.

Verfolgen Sie in den folgenden Beispielen den Grundton C der Ausgangstonart:
(Diesmal von C-Dur nach c-moll)

1. Beispiel:

```
C d e f g a h c                                  Dur
F g a b(S) c d-(s) e f                           Dur  (eine Quinte tiefer)
B(S) c d-(s) es(S) f g-(s) a b(S)                Dur  (eine Quinte tiefer)
```

```
Es(S) f g-(s) as(S) b(S) c-(s) d-(s) es(S)      Dur  (eine Quinte tiefer)
c-(s) d-(s) es(S) f-(s) g-(s) as(S) b(S) c-(s)  moll (eine Terz tiefer)
```

2. Beispiel:

```
C d e f g a h c                                 Dur
a h c d-(s) e f g a                             moll  (eine Terz tiefer)
d-(s) e f g-(s) a b(S) c d-(s)                  moll  (eine Quinte tiefer)
g-(s) a b(S) c-(s) d-(s) es(S) f g-(s)          moll  (eine Quinte tiefer)
c-(s) d-(s) es(S) f-(s) g-(s) as(S) b(S) c-(s)  moll  (eine Quinte tiefer)
```

3. Beipiel:

Hier wird zunächst von C-Dur nach C-moll moduliert, bei dem der Grundton beibehalten wird.
Anschließend geht es über die Paralleltonart Es(+)-Dur über eine Quintenkette zurück nach C(+)-Dur.

```
C d e f g a h c  Dur
c d es+(Sd) f g as+(Sd) b+(Sd) c  moll  (Wechsel D u r -> m o l l)
Es+(Sd) f+(d) g as+(Sd) b+(Sd) c d es+(Sd)  Dur  (eine Terz höher)
B+(Sd) c+(d) d es+(Sd) f+(d) g a+(d) b+(Sd)  Dur  (eine Quinte höher)
F+(d) g+(d) a+(d) b+(Sd) c+(d) d e+(d) f+(d)  Dur  (eine Quinte höher)
C+(d) d+(d) e+(d) f+(d) g+(d) a+(d) h+(d) c+(d)  Dur  (eine Quinte höher)s
```

An der Bezeichnung "(Sd)" bei es+ kann man erkennen, dass der Ton "es" um einen Halbton tiefer in Richtung subdominantische Richtung versetzt wird (wie zum Beispiel der Ton H in den Ton B bei Modulation con C-Dur nach F-Dur), gleichzeitig aber um ein Terzkommahöher in dominatischer Richtung (wie zum Beispiel A bei der Modulation von C-Dur nach G-Dur).

Diesen komplizierten Sachverhalt deckt das Menü "Modulationen berechnen" im Programm TTMusik "spielerisch" auf.

Erst durch die mathematische Fassung beim Programmieren dieses Sachverhaltes wurde mir dieses Problem fassbar.

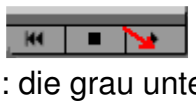
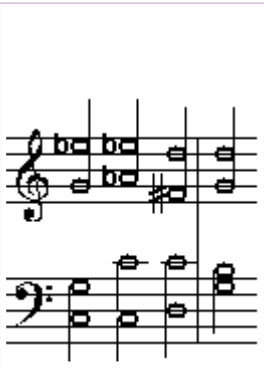
- Die verminderte Terz
- Die verminderte Septime und die übermäßige Sekunde

Was ist der Unterschied zwischen der verminderten Terz und einem Ganzton?

Antwort:

Singen Sie im folgenden Beispiel die Tonschritte G-As-Fis-G mit der **verminderten Terz As-Fis** mehrmals mit. Singen Sie anschließend den Tonschritt G-As-Fis-G allein.

Man nennt übrigens den überraschenden Akkord C-As-Es den neapolitanischen Sextakkord. Er vertritt häufig den Subdomentenakkord C-G-Es in der Kadenz.

Bei den folgenden Beispielen bitte hier  klicken.
Falls der Flashplayer nicht installiert ist: die grau unterlegte Beschreibung anklicken!

Anhören

Mitsingen!

Fis

Ges (Ges statt Fis ist falsch!)

Wenn Sie dann innerlich die harmonische Begleitung mit**hören**, wissen Sie es: Die verminderte Terz ist etwas ganz anderes als ein Ganzton.

Nur ein Chor, bei dem die SängerInnen aufeinander **hören**, kann dieses Intervall richtig intonieren. Und dann ist es auf einmal gar nicht mehr schwierig. Würde der Alt stur statt der verminderten Terz As-Fis den Ganzton As-Ges singen, würde das die übrigen Stimmen stark verunsichern.

Dies war jetzt eine hörpsychologische Erklärung. Mit dem Programm TTMusik wurde sie als Hörerlebnis erfahrbar. TTMusik liefert uns gleichzeitig die Rechnungen:

Intervall	As-G	G-Fis	As-Fis	As-Ges
Frequenzverhältnis	16/15	16/15	256/225	10/9
In Cent	111,73	111,73	223,5	182,4

Unterschied Ganzton zu verminderter Terz: 41 Cent, ein Füntelton.

In der Berechnung wurde der kleine Ganzton für As-Ges verwendet (in der Tonleiter as-moll absteigend). Mit dem großen Ganzton mit 203,9 Cent (Frequenzverhältnis 9/8) wäre der Unterschied immer noch rund 20 Cent.

Siehe auch Passus Duriusculus *) bei Mozart

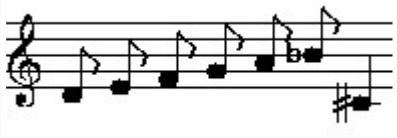
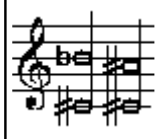
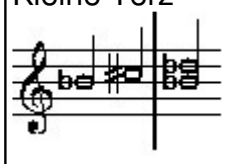
Die verminderte Septime und die übermäßige Sekunde

Das über die verminderte Terz Gesagte gilt auch hier.

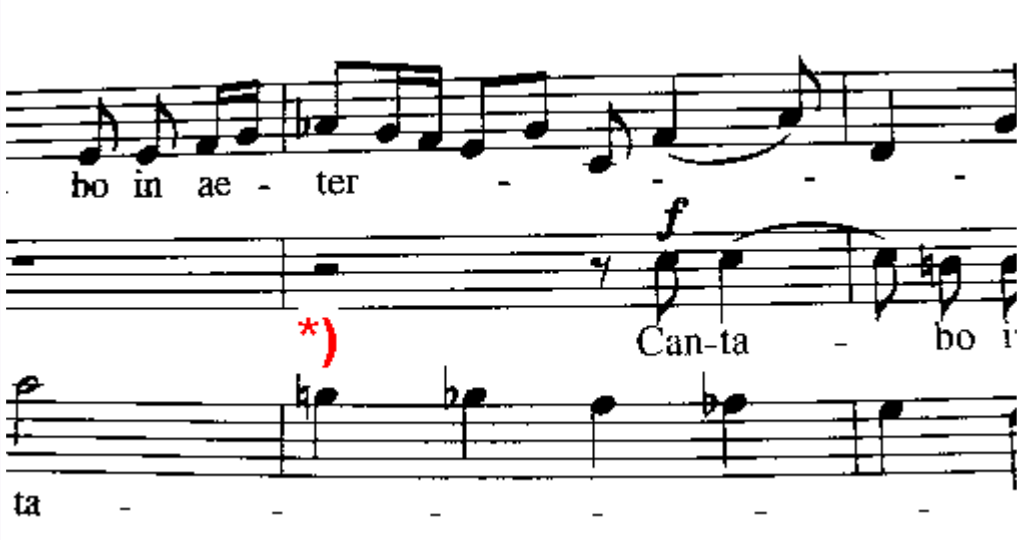
- Die verminderte Septime und die große Sexte haben in der gleichtufigen Stimmumg 900 Cent.
- Die übermäßige Sekunde und die kleine Terz haben in der gleichstufigen Stimmung 300 Cent.

In der reinen Stimmung hört es sich jedoch anders an:

	verminderte Septime	**Umkehrintervalle**

z.B. J. S. Bach 	große Sext 	übermäßige Sekunde Kleine Terz 
 Spielen	 Spiele Cis-B Spiele Cis-Ais	 Spiele B-Cis Spiele B-Des
Frequenzverhältnis =>	Cis-B 128:75 (925 Cent) Cis-Ais 5:3 (884 Cent) Unterschied: 41 Cent	B-Cis 75:64 (275 Cent) B-Des 6:5 (316) Unterschied: 41 Cent

Passus Duriusculus

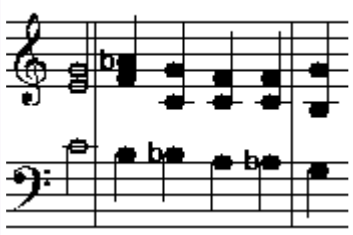


Aus:
Wolfgang Amadeus Mozart, KV 222 (KV 205 a)
"Misericordias Domini" d-Moll

Offertorium für gemischten Chor, Streicher und Basso continuo

München, 1775

Bei den folgenden Beispielen bitte hier klicken.
Falls der Flashplayer nicht installiert ist: die grau unterlegte Beschreibung anklicken!



rein

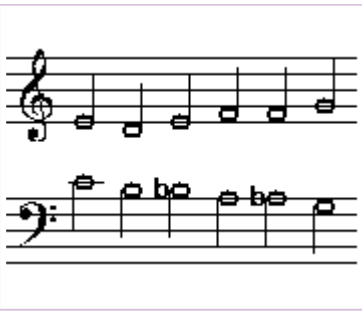
Bass rein

gleichstufig

Bass gleichstufig

Akkord	Frequenzen (rein)	Frequenzv.	Frequenzen (gleichstufig)
c1eg	264 330 396	5/4 6/5	264 332,6 395,6
hfa*	247,5 352 422,4	64/45 6/5	249,2 352,4 419,1
bcg	234,7 264 396	9/8 3/2	235,2 264 395,6
acf	220 264 352	6/5 4/3	222 264 352,4
a*cf	211,2 264 352	5/4 4/3	209,5 264 352,4
ghg	198 247,5 396	5/4 8/5	197,8 249,2 395,6

*) Hier ist noch interessant: Große Sext und verminderte Septime (gleichstufig beide 900 Cent) unterscheiden sich um 41 Cent, ein Fünftelton. Im zweiten Akkord H-F-As hat die verminderte kleine Septime H-As das Frequenzverhältnis von 128:75, das entspricht 925 Cent. Die großen Sext hat dagegen das Frequenzverhältnis von 5:3 entsprechend 884 Cent.

Der Bass kann sich zunächst an folgender zweistimmiger Intonationsübung einhören: (Vergleiche dazu Kodály.)

Anhören

Die vollständigen Akkorde wären:
C-Dur (C E)
G-Dur (H D)
C-Dur-Septime (B E Tritonus)
F-Dur (A F)
f-moll(AS F)
G-Dur (G G)

Hier gilt dasselbe, wie in "As-Fis dargelegt.

Die Halbtonschritte im Bass betragen in der reinen Stimmung statt jeweils 100 Cent:

c->h 112 Cent	h->b 92 Cent	b->a 112 Cent	a->as 71 Cent	as->g 112 Cent

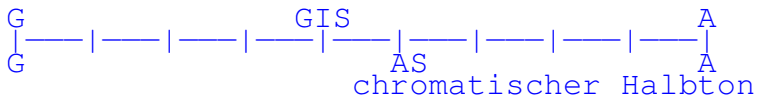
Man sieht: Halbtonschritte können sich um einen Fünftelton (41 Cent) unterscheiden.

Hier gilt die Beringer Faustregel von 1610: Halbtöne auf derselben Linie im Notensystem sind als kleiner Halbton, Halbtöne auf benachbarten Linien als großer Halbton zu intonieren.

Bei Pier Francesco Tosi kann man in seiner Singanleitung "Opinioni de' Cantori (Bologna, 1723) nachlesen:

Ein empfindliches Ohr hört zum Beispiel, dass ein Es höher ist als ein Dis. Bei ihm besteht ein "großer Halbton" wie E-F, H-C, D-Es oder Fis-G) aus 5 Teilen, während ein chromatischer Halbton (C-Cis, B-H oder As-A) aus 4 Teilen, wobei ein Ganton 9 Teile enthält.

diatonischer Halbton



Diese bestätigt die Beringer Faustregel.

Aus den Notizen Wolfgang Amadeus Mozart und seinem Kompositionsschüler Thomas Attwood, der 1885 in Wien studierte, geht klar hervor, dass bei Mozart der diatonische Halbton größer als der chromatische Halbton ist.

Siehe Seite 65 Ross W. Duffin How Equal Temperament Ruined Harmony (And Why You should Care)
Verlag W.W.Norton&Company, New York · London, 2007

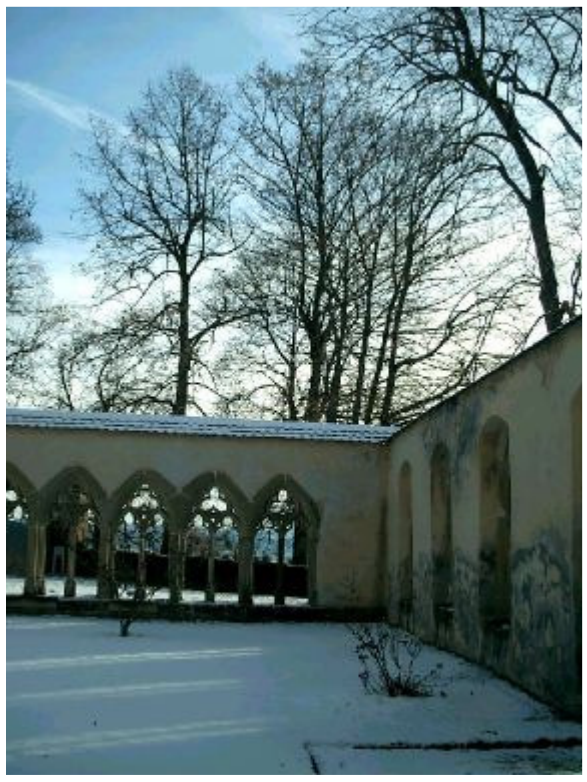
Die reine Stimmung: Vorbemerkung

Neufassung: Lektionen zur Musiktheorie

Was bedeutet beim Klavierspielen wohltemperiert?
Oder: Vom Zauber der reinen Terz.

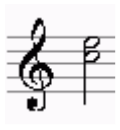
Nachtrag: Als Echo auf diese Seite wurde ich auf mitteltönige und wohltemperierte Stimmungen (die inzwischen in TTMusikintegriert wurden) aufmerksam gemacht. Ich habe gelernt: In diesen Stimmungen haben die Terzen (und andere Intervalle) in verschiedenen Tonarten ihren ganz besonderen Reiz.

Bemerkung: Ich habe hier in der Überschrift den Terminus *wohltemperiert* gewählt, da er über Johann Sebastian Bach berühmt ist. Jedoch besteht - und das ist weniger bekannt- zwischen *wohltemperiert* und *gleichstufig* ein Unterschied. Dies wird in den Lektionen erläutert. Unsere Tasteninstrumente sind - genau genommen - **gleichstufig** gestimmt. Jedoch gibt es historisch gestimmte Cembali und Orgeln. Wer dort die Schönheit eines reinen - oder fast reinen - C-Dur- oder G-Dur-Schlussakkord gehört hat, kann sehr gut verstehen, dass immer mehr Orgel auch historisch gestimmtes Register besitzen.



Kloster Kirchberg bei Sulz/Horb Baden-Württemberg. Dort ist die Orgel mitteltönig gestimmt. Diese Stimmung kommt der reinen Stimmung bei C-Dur-verwandten Tonarten nahe.

Dazu folgendes extremes Beispiel (hohe Lage, obertonreich, "Fiathupe").

Für die MP3-Dateien benötigen sie ein Abspielprogramm. Geeignet dazu ist WINAMP (Download). Prüfen Sie auch, ob Sie einen deutlichen Unterschied zwischen spiele(r) und spiele(rq) hören. Ist das nicht der Fall, sind Ihre Lautsprecher zu klein.

c2e2 große Terz

	rein	gleichstufig	Werkmeister III
normal	spiele(r) 528 660 (Hz) c2 e2	spiele(g) 528 665,2 (Hz) e2 um 5,2 Hz verstimmt. 5,2 Hz entspricht 17 Cent (erträglich)	spiele(w) 528 661,4 (Hz) c2 e2
(quadratischer) Differenzton verstärkt	spiele(rq) 132 528 660 (Hz) c c2 e2	spiele(gq) 137,2 528 665,2 (Hz) c um 5,2 Hz verstimmt. In dieser Lage verheerend: 5,2 Hz entspricht 67 Cent (Zum Vergleich: Halbton = 100 Cent)	spiele(wq) 133,4 528 661,4 (Hz) c2 e2
zusätzlich kubischer Differenzton	spiele(rqk) 132 396 528 660 (Hz) c g1 c2 e2	spiele(gqk) 137,2 390,8 528 665,2 (Hz)	spiele(wqk) 133,4 394,6 528 661,4 (Hz) c2 e2

Die (bei Verstimmung verheerenden) Differenztöne hört man bei eine Zweiklang im Ohr schwach mit.

Bei mitteltönig und nach Kirnberger III wohltemperiert gestimmten Instrumenten ist dieser Zweiklang in C-Dur rein gestimmt.

Man hört deutlich, dass der Differenzton c=e2-c2 bei der gleichstufigen Stimmung um 67 Cent vom reinen c deutlich mehr als ein Viertelton abweicht. (Beim kubische Differenzton g1=2·c2-e2 sind es "nur" 23 Cent - ein "Komma").

Die bei der gleichstufigen Stimmung unangenehm bemerkbare Schwebungen sind bei obertonreichen Klängen - wie etwa bei Zungenregistern- besonders ausgeprägt.

Weitere Hörbeispiele

Nach der Praxis nun zur Theorie

Die reine Stimmung: Einführung in die Theorie

Bemerkung: Bezüglich der Centangabe genügt für das Verständnis dieses Aufsatzes zu wissen: Die Musiktheoretiker haben sich darauf geeinigt, als Maß für einen (gleichstufigen) **Halbton 100 Cent** anzugeben (analog zur Prozentrechnung).

Die Oktave (12 Halbtöne) wird demnach mit **1200 Cent** angeben. Näheres hierzu

Intervalle werden durch Frequenzverhältnisse ausgedrückt

Die Oktav: Frequenzverhältnis 2:1 (1200 Cent).
Beispiel: c3 : c2 = 1056 Hz : 528 Hz = 2 : 1

Die Quinte: Frequenzverhältnis 3:2 (702 Cent).
Beispiel: g2 : c2 = 792 Hz : 528 Hz = 3 : 2 (in C-Dur, rein)

Die Quarte: Frequenzverhältnis 4:3 (498 Cent).
Beispiel: f2 : c2 = 704 Hz : 528 Hz = 4 : 3 (in C-Dur, rein)

Die große Terz: Frequenzverhältnis 5:4 (386 Cent).
Beispiel: e2 : c2 = 660 Hz : 528 Hz = 5 : 4 (in C-Dur, rein)

Die kleine Terz: Frequenzverhältnis 6:5 (316 Cent).
Beispiel: es2 : c2 = 633,6 Hz : 528 Hz = 6 : 5 (in C-Dur, rein)

Jetzt kommt die Störung, die dafür sorgt, dass alle rein gestimmten Instrumente bei Modulationen umgestimmt werden müssten: Es gibt zwei Ganztöne.

Der große Ganzton G: Frequenzverhältnis 9:8 (204 Cent).
Beispiel 1: d2 : c2 = 594 Hz : 528 Hz = 9 : 8 (in C-Dur, rein)
Beispiel 2: e2 : d2 = 668,25 Hz : 594 Hz = 9 : 8 (in D-Dur, rein)

Der kleine Ganzton G-: Frequenzverhältnis 10:9 (182 Cent).
Beispiel: e2 : d2 = 660 Hz : 594 Hz = 10 : 9 (in C-Dur, rein)

Der Halbton H: Frequenzverhältnis 16:15 (112 Cent).
Beispiel: f2 : e2 = 704 Hz : 660 Hz = 16 : 15 (in C-Dur, rein)

Damit lassen sich alle Dur- und Molltonarten aufbauen. Aber wie man hier schon sieht: Bei Modulationen verschieben sich die Frequenzen (siehe oben: e2 =660 Hz in C-Dur und e2 = 668,25 Hz in D-Dur).

Siehe Beispiel Modulation von C-Dur nach a-Moll.

Beispiel: Die C-Dur Tonleiter , die D-Dur-Tonleiter (Doppeldominante) und die d-Moll-Tonleiter (Parallele zur Subdominante)

C-Dur	c2	(G)	d2	(G-)	e2	(H)	f2	(G)	g2	(G-)	a2	(G)	h2	(H)	c3
	528		594		660		704		792		880		990		1056
D-Dur			d2	(G)	e2	(G-)	fis2	(H)	g2	(G)	a2	(G-)	h2	(G)	cis3	(H)	d3
			594		**668,25**		742,5		792		**891**		990		1113,75		1188
d-Moll			d2	(G)	e2	(H)	f	(G-)	g	(G)	a	(H)	b	(G)	c	(G-)	d
			586,67		660		704		**782,22**		880		938,67		1056		1173,33

Man sieht: Bei der reinen Stimmung verändert sich beim Übergang von C-Dur in D-Dur (die Tonart der Doppeldominante) nicht nur f in fis und c in cis um einen Halbton, sondern auch noch e um ein "Terzkomma" und a um ein Terzkomma. Diese "Feinmodulation" kommt in der Notenschrift gar nicht zum Ausdruck.

Und: Beim Übergang von C-Dur in d-moll (die Tonart der Mollparallele der Subdominante) verändert sich nicht nur h in b um einen Halbton sondern d um ein Terzkomma und g um ein Terzkomma.

Würde man die Töne nicht erhöhen oder erniedrigen, wären die Terzen oder die Quinten bei der Kadenz Tonika - Subdominante - Dominante, bei der alle acht Töne der Tonleiter erfasst werden, unrein.

Rechnung dazu:

In D-Dur: d2 = 594 Hz. Eine Quinte höher a2 = $594 \cdot \frac{3}{2}$ Hz = 891 Hz.

Eine Quinte höher: e3 = $891 \cdot \frac{3}{2}$ Hz = 1336,5 Hz. Eine Oktave tiefer: e2 =668,25 Hz.

In d-moll: f2 = 704 Hz. Eine kleine Terz tiefer d2 = $704 : \frac{6}{5}$ Hz = $586\frac{2}{3}$ Hz.

Eine Quart höher g2 = $586\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}$ Hz = $782\frac{2}{9}$ Hz.

Faustregel: Ein "Kreuz" oder ein "B" verändert zwei Töne: einen Ton um einen Halbton, einen anderen um ein Komma.

Die Rolle der großen Terz. Beim Aufkommen der Mehrstimmigkeit entdeckte man die Konsonanz der großen reinen Terz. Zuvor kannte man wohl nur den großen Ganzton. Nach zwei großen Ganztönen war dann der Halbtonschritt - das Leimma - entsprechend kleiner (die pythagoreische Stimmung). Die Terz mit zwei Ganztönen ist um ein Terzkomma zu hoch und wurde als dissonant betrachtet.

spiele große Terz c2e2(r)	spiele Ditonos c2e2+(r)
c2 e2 528 Hz 660 Hz	c2 e2+ 528 Hz 668,3 Hz
Leise hört man den Differenzton c mit. Dieser wird nun verstärkt.	
spiele große Terz c2e2(rq)	spiele Ditonos c2e2+(rq)
c c2 e2 132 Hz 528 Hz 660 Hz	c?cis c2 e2+ 140,3 528 Hz 668,3 Hz

Einschub Frequenzverhältnisse werden multipliziert.

Beispiel 1: Große Terz ($\frac{5}{4}$) und kleiner Terz ($\frac{6}{5}$) ergeben zusammen eine Quinte ($\frac{3}{2}$):

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3}{2}$$

Beispiel 2: Goßer Ganzton · kleiner Ganzton ergeben zusammen eine große Terz, d.h. $\frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} = \frac{5}{4}$

Beispiel 3: Zwei große Ganztöne ergeben den Ditonos, d.h. $\frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} = \frac{81}{64}$.

Der Ditonos ist um das **Terzkomma** ($\frac{81}{80}$) höher als die große Terz ($\frac{5}{4}$), da $\frac{5}{4} \cdot \frac{81}{80} = \frac{81}{64}$.

Der Quintenzirkel schließt sich in der reinen Stimmung nicht.

Zwölf Quinten ergeben das Frequenzverhältnis von $(\frac{3}{2})^{12}$ = 531441/4096 = 129,7 während

sieben Oktaven das Frequenzverhältnis von $(\frac{2}{1})^{7}$ = 128 haben. Der Unterschied ist das **pythagoreische Komma.**

Mitteltönige Stimmungen: Um mehrere Tonarten auf einem Tasteninstrument spielen zu können, muss man also Kompromisse eingehen. Bei den mitteltönigen Stimmungen werden der große und der kleine Ganzton angepasst.

Vorteil: Fast reine Akkorde, soweit man sich C-Dur-nah bewegt.
Nachteil: Man kann nur C-Dur-nahe Tonarten spielen. Entfernt man sich zu weit von C-Dur, gibt es unreine Quinten (genannt "Wolf"). Siehe "F-Dur/As-Dur".

Wohltemperierte Stimmungen: Diese sind der Versuch, so zu stimmen, dass alle Tonarten gespielt werden können. Es gibt keine zu unreine Quinten mehr. Die Terzen sind dafür um so mehr geschärft. Bei manchen Tonarten mehr, bei manchen weniger.

Gleichstufige Stimmung. Während es bei mitteltönigen und wohltemperierten Stimmungen viele Versuche gibt, die alle ihren Reiz haben, gibt es nur eine gleichstufige Stimmung. Die Oktave wird in zwölf gleiche Intervalle geteilt. Jede Tonart klingt gleich rein oder unrein. Charakteristisch sind die sehr geschärften Terzen (siehe Beispiel oben). Heutzutage hat sich bei den Klavieren und elektronischen Instrumenten die gleichstufige Stimmung durchgesetzt. Sie ist verteufelt bequem aber nicht das Ideal.

Violine und Klavier: Das menschliche Ohr kann sich nur auf die reine, natürlichen Stimmung einhören (reine Oktaven, Quinten und Terzen). Auf dem Klavier sind sie etwas "verstimmt" (damit alle Tonarten spielbar bleiben). Das Klavier bleibt stur, also muß der Geigenspieler, Sänger, Hornspieler und so weiter nachgeben und zum Beispiel die Terz zum Grundton mit dem Klavier zusammen "geschärft" spielen.

Das Programm TTmusik ermöglicht ein tieferes Verständnis. Man kann die Unterschiede hörbar zu erleben.

Danksagung an Hans-Joachim Röhrs, München, für seine anregenden Beiträge im Diskussionsforum de.rec.musik.klassik.

Weiterführende Links:

Intonation von Reiner Janke
Vergleich verschiedener wohltemperierter Stimmungen von Balint Dobozi
Eine selbstregulierende dynamische Stimmung für elektronische Instrumente.
Dort finden Sie im historischen Teil eine ausführliche Einführung in die verschiedenen Stimmungssysteme und ihre Auswirkungen auf die Reinheit der Akkorde. Alles außerordentlich gut erklärt und mit Klangbeispielen versehen.

Noch mehr

Hörbeispiele zu TTMusik

rein **mitteltönig** **gleichstufig**

Einleitung: Lektionen zur Musiktheorie

Hörbeispiele: Dreiklang mitteltönige Kadenz Kommafalle Obertonreihe
Einführung: rein gegenüber gleichstufig

Wie TTMusik Berechnungen durchführt und diese hörbar macht

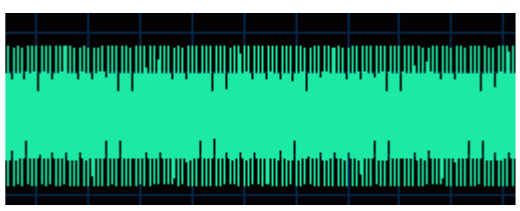
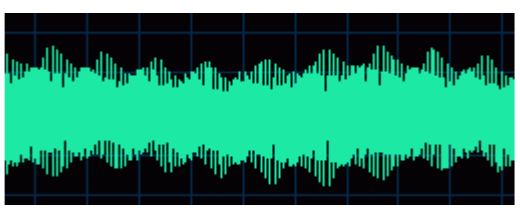
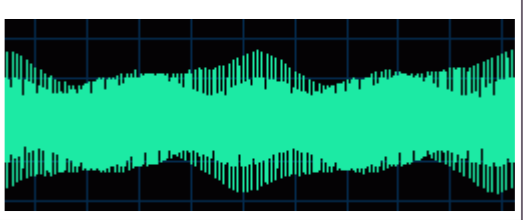
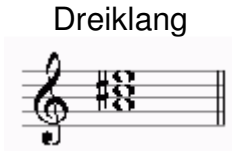
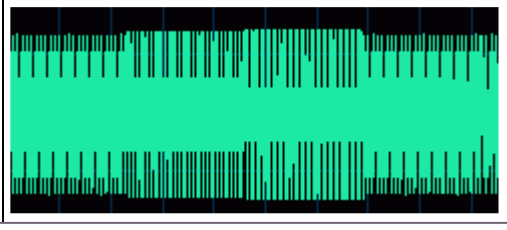
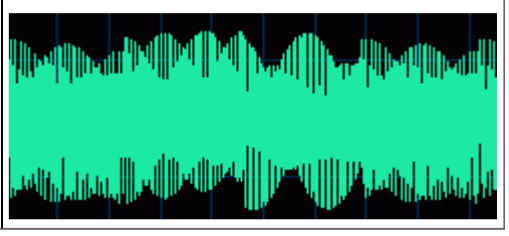
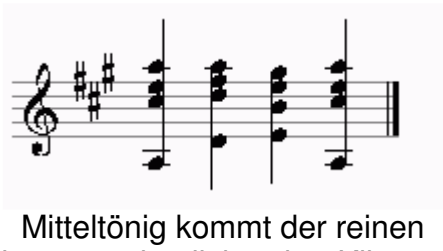
Beim Gebrauch von Instrumenten mit 12 Tönen in der Oktave ist man genötigt, Kompromisse einzugehen:

Rein gestimmte Instrumente können nur eine Tonart rein spielen,
mitteltönig gestimmte nur wenige Tonarten und in diesen schon gewisse Unreinheiten,
wohltemperiert gestimmte alle Tonarten, manche reiner als andere, aber alle mit Unreinheiten,
gleichstufig gestimmte oder **gleichmäßig temperiert** gestimmte alle Tonarten gleich unrein.

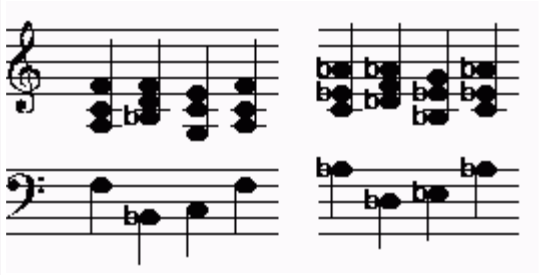
Heutzutage sind die meisten Klaviere gleichstufig gestimmt, manche Orgeln und Cembali mitteltönig oder wohltemperiert.

TTMusik macht diese Unterschiede hör- und sichtbar. Hier ein paar Demonstrationen.

Bei den folgenden Beispielen bitte hier klicken.
Falls der Flashplayer nicht installiert ist: die grau unterlegte Beschreibung anklicken!

Dreiklang	rein spielen Siehe: Theorie	gleichstufig Siehe: Theorie	mitteltönig Siehe: Theorie
	Frequenzen Verhältnisse a1c#e 440 550 660 5/4 6/5	Frequenzen a1c#e 440 554,4 659,3	Frequenzen a1c#e 440 550 658
			
Obertöne können in TTMusik beliebig beigemischt werden. (Hier: Grundton 100%, Obertöne 75%, 50%, 20%, 10% und 5%.)			
Unterschied			
???? Bitte erst anhören, dann erst "Unterschied" anklicken! ???			

mitteltönig spielen	rein	gleichstufig
Kadenz 	Frequenzen Verhältnisse ac2#ea 220 550 660 880 5/2 6/5 4/3 d1df#a 293,3 586,7 733,3 880 2/1 5/4 6/5 e1heg# 330 495 660 825 3/2 4/3 5/4 ac2#ea 220 550 660 880 5/2 6/5 4/3	Frequenzen ac2#ea 220 554,4 659,3 880 d1df#a 293,7 587,3 740 880 e1heg# 329,6 493,9 659,3 830,6 ac2#ea 220 554,4 659,3 880
Mitteltönig kommt der reinen Stimmung ziemlich nahe. Klingt viel farbiger als gleichstufig temperiert!		

In **Johann Sebastian Bach**s (1685 - 1750) Schaffensjahre fand in Stimmungsfragen ein Umbruch statt: Von der Mitteltönigkeit zur sogenannten wohltemperierten Stimmung. Bach lernte bei seinem Aufenthalt bei Buxtehude wohl Werckmeisters Temperatur kennen und verfasste "**Das Wohltemperierte Klavier**". Jetzt konnte man fast eben so gut Musikstücke in As-Dur wie in F-Dur u.s.w. anhören. Dass eben dies bei den mitteltönigen Stimmungen nicht möglich war, wird hier demonstriert.

	Mitteltönig	**Wohl temperiert**
	Genauer "Viertel mitteltönig"	Genauer "Werckmeister(1645-1706) III" (Ob Bach gerade diese Temperatur



(gerechnet mit mitteltöniger Quinte = vierte Wurzel aus 5)

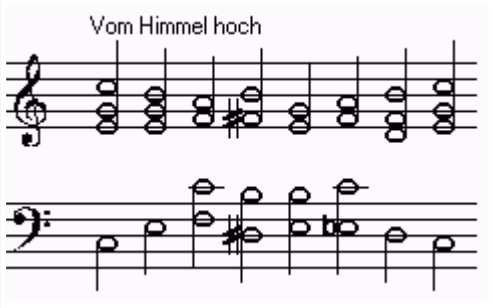
Spiele F-Dur/As-Dur

In TTMusik sind viele Temperaturen integriert und weitere können leicht eingefügt werden.)

verwendete, ist unbekannt. Wenn nicht, dann bestimmt eine ähnliche.)

Spiele F-Dur/As-Dur

Wohl temperiert heißt nicht: gleichstufig.
Jede Tonart hat noch Ihr Charakteristikum.

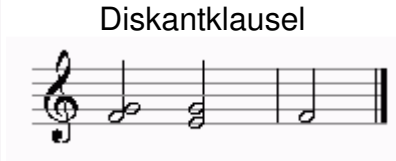
Unterschied von *DIS* und *ES* in der reinen Stimmung?

Spiele rein

```
Tonart Akkord   Frequenzen
c  ce1gc  132   330 396 528
   eegh   165   330 396 495
   fcfa   176   264 352 440
e  d#hf#h 154,7 248 371 495
   eheg   165   248 330 396
c         Im Quintenzirkel...
f         ... fortschreiten
b  e*cfa  156,4 264 352 440
f
c  ddfh   149   297 352 495
   ce1gc  132   330 396 528
d#=DIS e*=ES (Unterschied 20 Cent)
```

Spiele gleichstufig

```
   Akkord Frequenzen
   ce1gc  132 333 396 528
   eegh   166 333 396 498
   fcfa   176 264 352 444
   d#hf#h 157 249 373 498
   eheg   166 249 333 396
   e*cfa  157 264 352 444
   ddfh   148 296 352 498
   ce1gc  132 333 396 528
Hier d#=e*, d.h. DIS=ES
```

Was klingt besser? Mit großem oder mit kleinem Ganzton?

Diskantklausel

Mit großem Ganzton

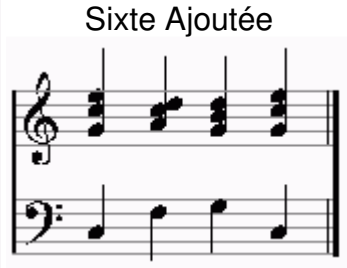
```
Frequenzen  Verhältnis
f1g1 352 396  9/8
e1g1 330 396  6/5
f1f1 352 352  1/1
```

Mit kleinem Ganzton

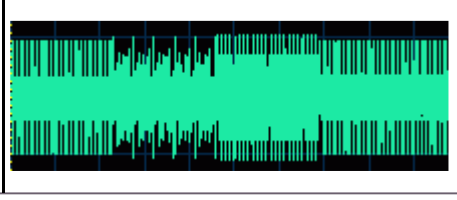
```
Frequenzen     Verhältnis
f1g1 352 391,1 10/9
e1g1 330 391,1 32/27
f1f1 352 352   1/1
```

Unterschied

???? Bitte erst solange anhören, bis Sie einen Unterschied entdecken! ???

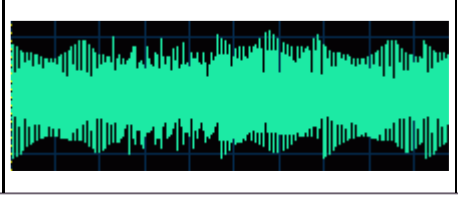
Sixte Ajoutée

rein spielen

```
Akkord Frequenzen      Fr.-Verh.
cg1ce 132 396 528 660 3/1 4/3 5/4
fa1cd 176 440 528 594 5/2 6/5 9/8
gghd  198 396 495 594 2/1 5/4 6/5
cg1ce 132 396 528 660 3/1 4/3 5/4
```



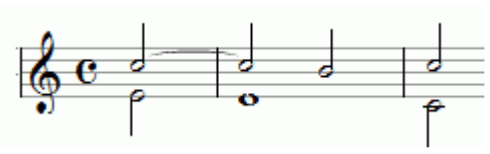
gleichstufig

```
Akkord  Frequenzen
cg1ce 132   395,6 528   665,2
fa1cd 176,2 444   528   592,7
gghd  197,8 395,6 498,4 592,7
cg1ce 132   395,6 528   665,2
```

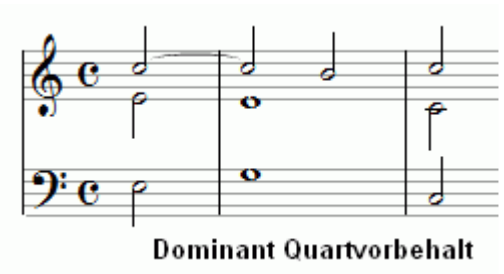


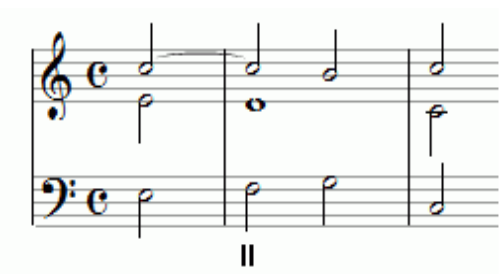
Nebenbei bemerkt:
Im Schlussakkord hat der Sopran die große Terz zum Grundton (Das Intervall c-e). In der reinen Stimmung hat e'' die Frequenz 660 Hz. In der gleichstufigen ist die Frequenz von e'' mit 665,2 Hz etwas höher. Die Terz ce ist "geschärft".
Dem an die gleichstufige Stimmung gewöhnte Ohr kommt zunächst diese große Terz bei der reinen Stimmung zu tief vor im Vergleich zur gleichstufigen Stimmung. Höre dazu jedoch das Beispiel c2e2.

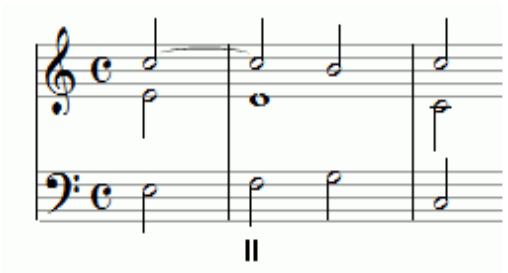
Harmonisierung einer zweistimmige Klausel

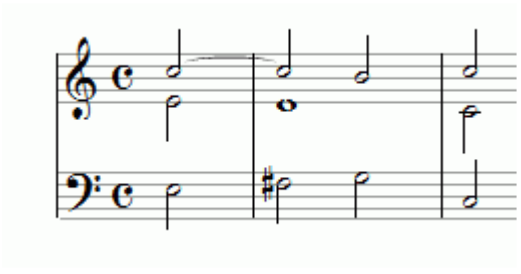


Zweistimmige Klausel.

Anhören: mp3 ogg

Die zweistimmige Klausel wird nun mit einem Bass versehen und harmonisiert: Dominant Quart-Vorbehalt

Anhören: mp3 ogg

Der Akkord auf der II. Stufe f-d'-c'' Subdominantisch (Das d' im 2. Takt zunächst ein syntonisches Komma dann wieder höher)

Anhören: mp3 ogg

Der Akkord auf der II. Stufe f-d'-c'' doppeldominatisch (Das d' im 2. Takt wie in C-Dur).

Anhören: mp3 ogg

Der Akkord auf der II. Stufe fis-d'-c'' echt doppeldominatisch

Anhören: mp3 ogg

Der Akkord der II. Stufe

Jetzt wird gezeigt, wie der Dreiklang auf der II. Stufe der Tonleiter zur Kommafalle werden kann. Wie soll man die Folge Subdominantenparallele - Dominante - Tonika im Chor singen?

Das Problem ist, dass die Quinte D-A bzw. die Quarte A-D in der C-Durtonleiter nicht rein ist. Der Ganzton von C nach D hat in C-Dur das Verhältnis 8:9 ("großer Ganzton" 203,9 Cent). Für einen reinen D-A-Klang müsste das Verhältnis vom Ton C zum Ton D C:D=9:10 ("kleiner Ganzton" 182,4 Cent) wie in F-Dur sein. Oder der Ganzton G-A müsste das Verhältnis G:A=8:9 wie in G-Dur statt das Verhältnis 9:10 haben. (Die Verhältnisse werden in TTMusik automatisch berechnet.)

Lassen Sie unten das erstes Beispiel erklingen und horchen Sie auf die unschönen Schwebungen im dritten Akkord!.

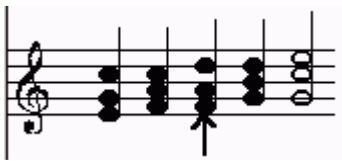
Im zweiten Beispiel intoniert der Sopran das D etwas tiefer. Dies ist eine (Fein-)Modulation nach dem D der F-Dur-Tonleiter. Beim neapolitanischen Sextakkord Des-F-As wird diese Modulation in den Subdominantenbereich betont.

Im dritten Beispiel intonieren Alt und Tenor das F und A ein Komma höher. Dies wiederum ist eine (Fein-)Modulation nach G-Dur. Der Akkord FAD wäre dann die Doppel(moll)dominante. Bei der Doppel-Dur-Dominante mit Fis wird diese Modulation in den Dominantenbereich betont.

> Diese Version scheint mir angebracht. Vergleiche den vorhergenden Abschnitt "Harmonisierung einer zweistimmige Klausel".
>
> Dann ist auch das Problem der "Kommafalle" umgangen.
>
> Die Bezeichnung "Parallele der Subdominante" ist dann aber unzufreffend. Besser würde dieser Akkord als "Doppeldominante (in moll)" bezeichnet werden müssen.

Hinweis: Der höchste Ton E (kleine Terz zu C) im letzten Akkord wird dem an die gleichstufig temperierte Stimmung gewöhnten Ohr zunächst etwas zu tief erklingen.

Das Problem der Subdominantparallele oder Doppel(moll) dominante. Betrifft den Akkord: F-A-D



F-A-D unrein

```
Akkord Frequenzen      Fr.-Verh.
e1gc   330 396 528     6/5 4/3
f1ac   352 440 528     5/4 6/5
f1ad   352 440 594     5/4 27/20
                      (unrein!)
g1hd   396 495 594     5/4 6/5
g1ce   396 528 660     4/3 5/4
```

erstes D tiefer

```
Akkord  Frequenzen     Fr.-Verh.
e1gc    330 396 528    6/5 4/3
f1ac    352 440 528    5/4 6/5
f1ad    352 440 586,7  5/4 4/3
                =====
           (d tiefer)
g1hd    396 495 594    5/4 6/5
                ====
d wieder höher)
g1ce    396 528 660    4/3 5/4
```

F-A-D Als Doppeldominante

```
Akkord  Frequenzen       Fr.-Verh.
e1gc    330   396   528  6/5 4/3
f1ac    352   440   528  5/4 6/5
f1ad    356,4 445,5 594  5/4 4/3
                    ===
      (f und a höher)
g1hd    396   495   594    5/4 6/5
                    ===
               (d bleibt)
g1ce    396   528   660    4/3 5/4
```

Mit TTmusik können Sie die Intervalle statt mit den Frequenzverhältnissen auch mit dem Centmaß angeben lassen:

```
        gleichstufig temperiert (Zum Vergleich)
        Frequenzen in Cent     Intervalle in Cent
          ( c = 0 Cent)        (Oktave = 1200 Cent)
e1gc  400   700     0          300     500
f1ac  500   900     0          400     300
f1ad  500   900   200          400     500
g1hd  700  1100   200          400     300
g1ce  700     0   400          500     400
          1. Beispiel
        Frequenzen in Cent     Intervalle in Cent
e1gc  386,3 702     0          315,6   498,0
f1ac  498,0 884,4   0          386,3   315,6
f1ad  498,0 884,4 203,9        386,3   519,6
g1hd  702  1088,3 203,9        386,3   315,6
g1ce  702     0   386,3        498,0   386,3
          2. Beispiel
        Frequenzen in Cent     Intervalle in Cent
e1gc  386,3 702     0          315,6   498,0
f1ac  498,0 884,4   0          386,3   315,6
f1ad  498,0 884,4 182,4        386,3    498
```

Die Kommafalle

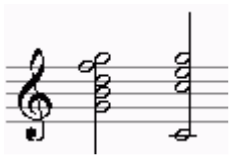
Wird im 2. Beispiel das Sopran-d im 4. Akkord mit **587** Hz statt mit 594 Hz gesungen, dann erklingt die Dominante und der Schlussakkord zu tief. Wegen der Feinmodulation muss das "d" im 4. Akkord ein Komma höher sein wie im 3. Akkord. (vergleiche Beispiel "erstes d tiefer").

Kommafalle

```
           Frequenzen      in Cent
e1gc       330 396 528     386  702    0
f1ac       352 440 528     498  884    0
f1ad-      352 440 587     680  884  182
g1-h-d-    391 488 587     680 1066  182
g1-c-e-    391 521 652     680 1178  364
("-" in TTMusik: Ein Komma tiefer)
e1-g-c-    326 391 522     364  680 1179
```

```
g1hd   702  1088,3 203,9     386,3  315,6
g1ce   702     0   386,3     498,0  386,3
         3. Beispiel
       Frequenzen in Cent    Intervalle in Cent
e1gc   386,3 702     0       315,6  498,0
f1ac   498,0 884,4   0       386,3  315,6
f1ad   519,6 905,9 203,9     386,3 498,0
g1hd   702  1088,3 203,9     386,3  315,6
g1ce   702     0   386,3     498,0  386,3
```

```
f1-a-c-     348 435 522     477  863 1179
f1-a-d——    348 435 579     477  863  161
g1——h——d—— 386 482 579     659 1045  161
g1——c——e—— 386 515 644     659 1157  343
  (Sollfrequenz)
g1ce        396 528 660     702 1200  386
```

Dominantseptakkord

Im folgenden können Sie den Dominantseptakkord vergleichen: (In hoher Lage hört man den Unterschied besonders gut)

- gleichstufig (Notbehelf. Beachte jedoch die Schwebung.)
- rein mit großem Ganzton F-G (optimal zur Tonika strebend)
- mit kleinem Ganzton F-G (unschön: siehe Diskantklausel)
- mit reiner Naturseptime (der beste Wohlklang, dann aber schon keine Dissonanz mit dem Bedürfnis nach Auflösung mehr. Außerdem ist die Melodiefolge F-E vom Dominatseptimakkord zur Tonika unrein.)

Spielen Sie nach jedem Septakkord die Tonika als Auflösung!

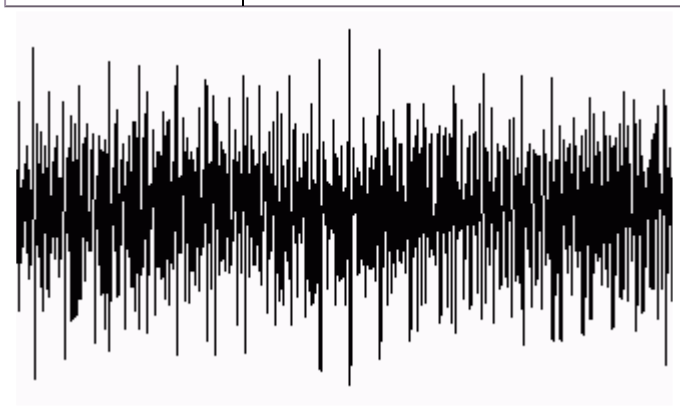
gleichstufig

rein

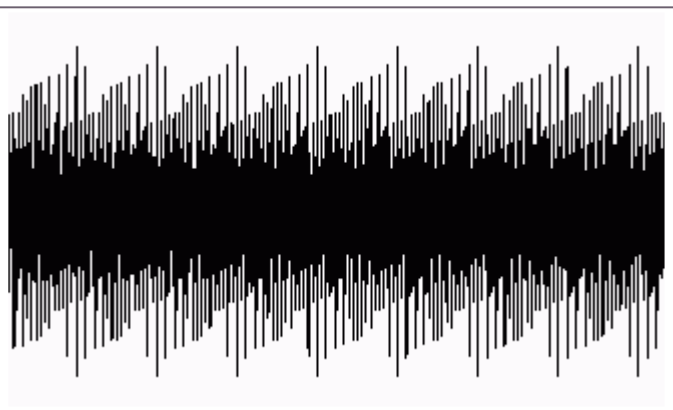
unrein

G-F Naturseptime

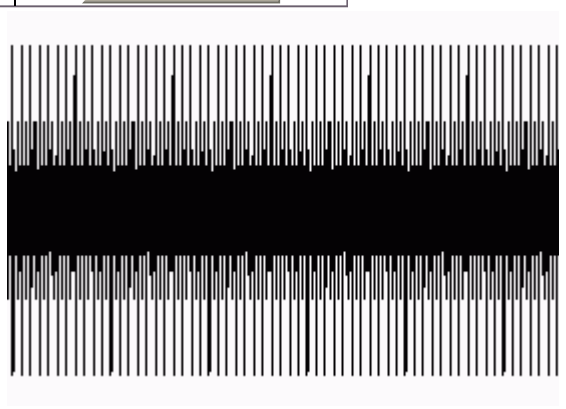
Tonika rein



Septakkord gleichstufig intoniert f=698 Hz

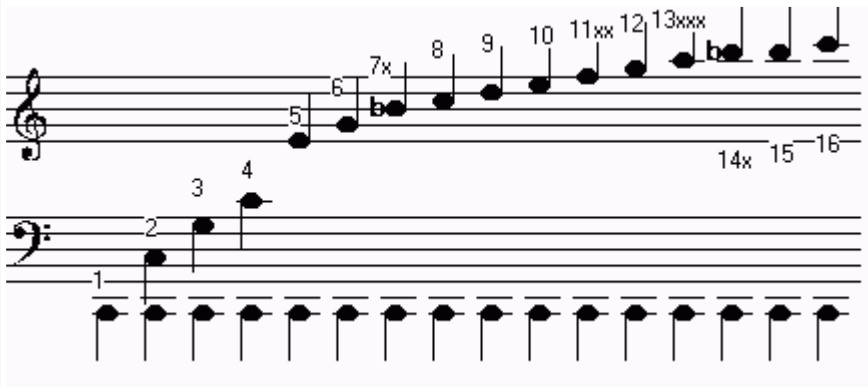


reiner Septakkord f=704 Hz



Septakkord mit Naturseptime f=693

Die Obertonreihe




```
Angaben in Cent mit Identifikation:
Oktave = Prim , 1200 Cent = 0 Cent)
1:1  Grundton C  = 0
1:2  Oberton  c  = 0
1:3  Oberton  g  = 702
1:4  Oberton  c1 = 0
1:5  Oberton  e1 = 386
1:6  Oberton  g1 = 702
1:7  Oberton  b1x= 969 (Naturseptime)
             (b rein = 1018)
1:8  Oberton  c2 = 0
1:9  Oberton  d2 = 204
1:10 Oberton  e2 = 386
1:11 Oberton  f2xx = 551 (Alphorn-Fa)
(f rein =498 fis rein =590)
1:12 Oberton  g2 = 702
1:13 Oberton  axxx = 840
(as rein = 813 a rein = 884)
1:14 Oberton  b2*= 969
1:15 Oberton  h  = 1088
1:16 Oberton  c3 = 0
```

Obertöne

1:1 bis 1:8

1:8 bis 1:16

1:16 bis 1:32

1:32 bis 1:64

Die Obertöne innerhalb der Tonleiter in Cent (100 Cent = 1 Halbton) ("Rein" bezogen auf die diatonische Tonleiter)

		Cent	nächster Ton
	1:1	0	c rein
	1:2	1200	c rein
1. Oktave			
	1:2	0	c rein
	1:3	702	g rein
	1:4	1200	c rein
2. Oktave			
	1:4	0	c rein
	1:5	386,3	e rein
	1:6	702	g rein

5. Oktave		Cent	nächster Ton
	1:32	0	c rein
	1:33	53,3	c-des
	1:34	105	des
	1:35	155,1	des-d
	1:36	203,9	d rein
	1:37	251,3	d-es
	1:38	297,5	es
	1:39	342,5	es-f
	1:40	386,3	e rein
	1:41	429,1	e

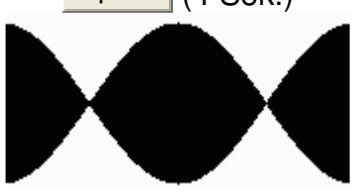
	1:7	968,8	b (Naturseptime)
	1:8	1200	c rein
3. Oktave			
	1:8	0	c rein
	1:9	203,9	d rein
	1:10	386,3	e rein
	1:11	551,3	f-fis (Alphorn-Fa)
	1:12	702	g rein
	1:13	840,5	as-a
	1:14	968,8	b (Naturseptime)
	1:15	1088,3	h rein
	1:16	1200	c
4. Oktave			
	1:16	0	c rein
	1:17	105	des
	1:18	203,9	d rein
	1:19	297,5	es
	1:20	386,3	e rein
	1:21	470,8	e-f
	1:22	551,3	f-fis (Alphorn-Fa)
	1:23	628,3	fis
	1:24	702	g rein
	1:25	772,6	as
	1:26	840,5	as-a
	1:27	905,9	a
	1:28	968,8	b (Naturseptime)
	1:29	1029,6	b
	1:30	1088,3	h rein
	1:31	1145,0	h-c
	1:32	1200	c rein

	1:42	470,8	e-f
	1:43	511,5	f
	1:44	551,3	f-fis (Alphorn-Fa)
	1:45	590,2	fis
	1:46	628,3	fis
	1:47	665,5	fis-g
	1:48	702	g rein
	1:49	737,7	g
	1:50	772,6	as
	1:51	806,9	as
	1:52	840,5	as-a
	1:53	873,5	as
	1:54	905,9	as-a
	1:55	937,6	a-b
	1:56	968,8	b (Naturseptime)
	1:57	999,5	b
	1:58	1029,6	b
	1:59	1059,2	b-h
	1:60	1088,3	h rein
	1:61	1116,9	h
	1:62	1145,0	h-c
	1:63	1172,7	c
	1:64	1200	c rein

Schwebungen 440 Hz und 440,5 Hz

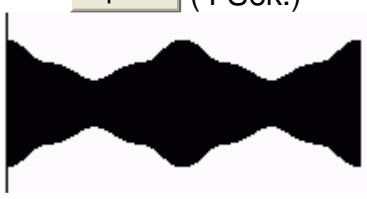
Reine Sinusschwingung

Spiele (4 Sek.)



Sinusschwingung mit 50%+25%-Obertönen

Spiele (4 Sek.)



Alle Hörbeispiele und Frequenz(verhältnis)berechnungen wurden mit TTmusik (Downloadseite) erzeugt (Menü "Spielen|Speichere als Wav-Datei"). Anschließend wurden die Wav-Dateien mit in MP3-Dateien komprimiert.

Interessiert an weiteren Beispielen? Dann schreiben sie mir (Kontakt).

Ihr Computer muss mit einem Abspielgerät für MP3-Dateien ausgerüstet sein (Zum Beispiel Windows Mediaplayer)!
Die Antworten werden mit Java-Script ausgegeben. (Sonst bitte im Quelltext nachschauen!)

Ein wenig T

TTMusik

Die musikalische Feinanalyse

I Grundlagen des Programms TTMusik

Einführung: Lektionen zur Musiktheorie

Folgender Sachverhalt soll analysiert werden:
Wie erklingen Akkorde, wenn sie nur *rein* erklingen dürfen?
Dabei gehe ich von folgender These aus:

- Chöre, Streichquartette u.s.w. können Intervalle nur rein oder unrein intonieren, aber niemals gleichschwebend!

TTMusik dient zur Darstellung eines Referenzklanges (das gleichschwebende Klavier ist dazu ungeeignet) und zur **harmonischen Feinanalyse** eines Chorstücks. In der reinen Stimmung gibt es nicht nur Veränderungen um einen Halbton, z.B. "f" in "fis" sondern auch Veränderungen um ein **Terzkomma** (siehe unten: Frequenzverhältnis 81/80). Dies ist in der üblichen Notation aber nicht sichtbar und soll durch TTMusik hörbar und verständlich werden.

z.B. Der Ton "d" mit der Frequenz 297 Hertz wird um ein **Terzkomma** tiefer zu "d-" mit der Frequenz 293 Hertz, d.h. Der Ganztonschritt "c->d" kann einmal das Frequenzverhältnis 9/10, das andere Mal das Frequenzverhältnis 10/9 haben.

Im Folgenden wird der große Ganzton mit "G", der kleine mit "G-" bezeichnet.

Sie können diese Unterschiede mit dem Programm TTMusik studieren. TTMusik errechnet das Gewünschte und macht es hörbar. Damit lernen Sie auch die Harmonik besser verstehen. (TTMusik erzeugt die Töne digital äußerst exakt. Sie können noch Schwebungen von 440 und 440,05 Hertz wahrnehmen).

Erklärung der "Feinmodulation" beim Übergang von C-Dur nach a-moll

TTMusik macht dies sichtbar. Alle Berechnungen können in TTMusik durchgeführt werden

Frequenzen													
	c	d	e	f	g	a	h	c	d	e	f	g	a
C-Dur	132	148,5	165	176	198	220	247,5	264	297	330	352	396	440
A-Moll						220	247,5	264	293	330	352	396	440

Die Quinte DA ist in C-Dur unrein (Frequenzverhältnis 40/27), in A-Moll aber rein (Frequenzverhältnis 3/2).

Frequenzverhältnisse												
	c/d	d/e	e/f	f/g	g/a	a/h	h/c	c/d	d/e	e/f	f/g	g/a
C-Dur:	9/8	10/9	16/15	9/8	10/9	9/8	16/15	9/8	10/9	16/15	9/8	10/9
C-Dur	G	G-	H	G	G-	G	H	G	G-	H	G	G-
a-Moll						9/8	16/15	10/9	9/8	16/15	9/8	10/9
a-Moll						G	H	G-	G	H	G	G-
Legende: G=großer Ganzton (204Cent) G-=kleiner Ganzton (182 Cent) H=Halbton (112 Cent) Zum Vergleich: gleichstufige Stimmung. Ganzton=200 Cent Halbton=100 Cent												

Nebenbei bemerkt: Der Unterschied von "G" und "G-" entstand dadurch, dass man im 16. Jahrhundert bei der Mehrstimmigkeit die reine Terz "ce" mit dem Frequenzverhältnis 5/4=9/8*10/9 als konsonant erklingen lassen wollte. (Die pythagoreische Terz mit dem Frequenzverhältnis 9/8*9/8=81/64 ist dissonant! Unterschied: Das **Terzkomma** mit dem Frequenzverhältnis 81/80.)

Sie sehen:	In C-Dur ist der Übergang c->d ein großer Ganzton "G"
	In a-moll ist der Übergang c->d ein kleiner Ganzton "G-"

Ebenso können Sie feststellen, dass beim Übergang von C-Dur in die Tonart F-Dur der Subdominante sich nicht nur "h" in "b" ändert, sondern auch "d" in "d-".

Der Unterschied des reinen Subdominantenparallelelakkordes "d-fa" zum unreinen Akkord "dfa" der C-Dur-Tonleiter erkennt man an der Klangfarbe.

Der neapolitanischen Sextakkord übertreibt: "d" wird "des" (einzigartige Klangfarbe!)

Beim Übergang C-Dur in e-Moll ändert sich "f" zu "fis", beim Übergang C-Dur in G-Dur nicht nur "f" in "fis", sondern auch "a" in "a+".

Am Beispiel "Übergang von C-Dur nach D-Dur" sieht man, wie sich zwei Töne um einen Halbton und zwei Töne um ein Terzkomma verändern.

Um diese Feinübergänge zu studieren dient "TTMusik". Das erste "T" bedeutet: Notation als "Text". Das zweite steht für "Tabelle". (In der Philosophie von "TTW" wird Texten eine Interpretation als Tabelle gegeben und damit auf aufwendige Datenverarbeitungsprogramme verzichtet.)

Die Feinanalyse erzwingt auch eine genauere Bezeichnungsweise in der Harmonielehre.

Die These des Autors von TTMusik "Der Übergang zur Mollparallele von C-Dur nach e-moll ist harmonisch dasselbe wie der Übergang von C-Dur nach a-moll." kann mit TTMusik leicht gezeigt werden. Ein Ton wird beidesmal alteriert: Herkömmlich ersichtlich beim Übergang von C-Dur in e-Moll nur "f" in "fis". In TTMusik zusätzlich erkennbar: beim Übergang C-Dur in a-moll auch "d" in "d-" (siehe unten).

Analog kann mit TTMusik die folgende These gezeigt werden: "Der Übergang zur Durparallele von c-moll nach As-Dur ist harmonisch dasselbe wie der Übergang von c-Moll nach Es-Dur."

In der herkömmlichen Harmonielehre ist die Doppeldominante in Moll dasselbe wie die Mollparallele der Subdominante. TTMusik zeigt: Beides ist schon eine Modulation, die sich nicht erst in der farblichen Verstärkung zur Dur-Doppeldominante und Neapolitanischer Sextakkord zeigt.

Deshalb schlägt der Autor folgende Bezeichnung vor:

a-moll ist die	subdominantische	Mollparallele von C-Dur
e-moll ist die	dominantische	Mollparallele von C-Dur
As-Dur ist die	subdominantische	Durparallele von c-moll
Es-Dur ist die	dominantische	Durparallele von c-moll

Im Kapitel Modulationen wird gezeigt, dass zum Beispiel a-Moll eine Modulation von C-Dur in **Richtung Subdominante** ist.

Alle Parallelen sind gleichberechtigt (jeweils ein Ton wird alteriert: um einen Halbton oder um ein Terzkomma).

Die Alternative

"a-moll ist die Mollparallele von C-Dur"
"e-moll ist die Mollparallele *der Dominante* von C-Dur"

erweckt den Eindruck, als sei nur eine Parallele eine Modulation, die andere nicht. Und das ist unter dem Gesichtspunkt der reinen Stimmung nicht korrekt!

Das Stimmungsprinzip von TTMusik ist folgendes. Für jede Tonart sind 12 Töne so verfügbar, dass z.B. in C-Dur/c-moll die Akkorde ceg, fac, ghd (Dur), ce*g, fa*c, gbd (moll e*=Es a*=As), sowie d*fa* (d* = Das "phrygische" Des) und df# (f# = fis = Die Terz der Doppeldominante) rein erklingen (reine Terzen und reine Quinten).

Aber c# (Cis) z.B. wird in TTMusik in C-Dur/c-moll mit d* (Des) verwechselt. Sie erkennen das jedoch sofort an den unreinen Akkorden z.B. dem Akkord ac#e mit der verminderten Quart ad* (Frequenzverhältnis 32/25) und dem übermäßigen Ganzton d*e (Frequenzverhältnis 75/64). Cis hat in C-Dur absolut nichts zu suchen (Ausnahme: chromatischer Übergang), wohl aber z.B. in D-Dur. Und das muss in TTMusik auch vermerkt werden.

Ich halte das für eine gute harmonische Übung: Man muss wissen, wo man sich befindet, wohin es geht und wie man wieder in die ursprünliche Tonart zurückkommt, ohne in die "Kommafalle" zu tappen. Beispielsweise ist in C-Dur der Übergang zur Paralleltonart der Subdominante mit dem Akkord dfa eine Modulation, da sich d um ein Terzkomma verschiebt. (In TTMusik können Sie das noch der Tonart F-Dur zuorden.) Im Gegensatz zu den feststehenden mitteltönigen, wohltemperierten oder gleichschwebenden Stimmungen sind die Frequenzen in TTMusik flexibel anpaßbar.

Noch genauer gefaßt:
Die Frequenzverhältnisse zwischen den aufeinanderfolgenden Tönen der 12-Tonskala kann man für C-Dur folgender Tabelle entnehmen.

Intervall	Frequenzverhältnis	In Cent	in T
cd*	16/15	111,7	5
d*d	135/128	92,2	4
de*	16/15	111,7	5
e*e	25/24	70,7	3
ef	16/15	111,7	5
ff#	135/128	92,2	4
f#g	16/15	111,7	5
ga*	16/15	111,7	5
a*a	25/24	70,7	3
ab	27/25	133,2	6
bh	25/24	70,7	3
hc	16/15	111,7	5

Die letzte Zeile sind Näherungswerte für Vielfache des Kommas T (Terzkomma T = 21,5 Cent, Pythagoreisches Komma T = 23,5 Cent), wobei für den großen G und kleinen Ganzton G- gilt: G=9T und G-=8T.

Die Neunteilung des Ganztons kommt der reinen Stimmung erstaunlich nahe und wurde in den Lehrwerken seit dem 17 Jahrhundert praktiziert.

Für das "Komma" wurde die Spannbreite Terzkomma bis pythagoreisches Komma angenommen.

Bezogen auf das Terzkomma sind statt 3;4;5;6;8 oder 9 die genaueren Werte:
3,286; 4,286; 5,195; 6,195; 8,481 und 9,481.

Bezogen auf das pythagoreische Komma sind die genaueren Werte:
3,012; 3,929; 4,763; 5,679; 7,775 und 8,691.

Sie können nun mit TTMusik kritischen Chorpassagen analysieren lassen. Belassen Sie bei einem Akkord versehentlich die "falsche" Tonart, sehen Sie sofort an den unreinen Intervallen, dass eine Feinmodulation stattfand. Sie müssen die Tonart wechseln.

Sie müssen sich dann noch entscheiden: Geht es in Richtung Subdominante oder in Richtung Dominante bzw. beim Übergang zur Paralleltonart eine Terz nach oben (C-Dur nach e-moll bzw. c-Moll nach Es-Dur) oder eine Terz nach

unten (C-Dur nach a-Moll bzw. c-moll nach As-Dur). Bei der Rückkehr zur "Heimattonart" sehen Sie sofort an den Frequenzen, ob Sie in eine "Kommafalle" getappt sind oder nicht.

Downloadseite

Modulatio

Mathematische Beschreibung von Tonsystemen

(c) Joachim Mohr

Neufassung: Lektionen zur Musiktheorie

Zusammenfassung

Vom hörpsychologischen Standpunkt aus (wie die alten Griechen ohne Physik) kann man feststellen: Die Intervalle des Tonraums sind geordnet ("7 Oktaven sind kleiner als 12 Quinten"), werden additiv geschrieben und können im System der reinen Stimmung durch 3-dimensionale "Vektoren" (je nach Basis verschieden) dargestellt werden. Die von der Physik her bekannten Frequenzverhältnisse erhält man allein aus der Obertonreihe 1, 2, 3, 4, 5.

Es handelt sich hier um eine Vereinfachung eines Systems von Winfried Neumaier und ist dort als Anhang in seinem Buch "Was ist ein Tonsystem" veröffentlicht. Ein am mathematischen Institut in Tübingen im Dezember 1996 gehaltener Vortrag wird hier in überarbeiteter Version vorgestellt. (Danksagung an Wilfried Neumaier für die vielen anregenden Diskussionen über dieses Thema während seiner Tätigkeit als Leiter des ev. Kirchenchores in Rottenburg.)

Einleitung

Ich beabsichtige im folgenden die formale Struktur des Tonraums ohne Bezugnahme auf die Physik mathematisch zu beschreiben. Nur was man mit Hilfe des Hörens bestimmen kann, soll beschrieben werden. Das Gehör ist also die einzige Möglichkeit, Aussagen zu verifizieren. Wir werden uns dem Gegenstand mit möglichst wenigen Voraussetzungen annähern.

Der Ton- und Intervallraum als mathematische Struktur

Töne sind hörbar. Von diesem unmittelbares sinnliches Erlebnis gehen wird aus ... ohne Messinstrumente. Uns genügt, was wir hören. Wir lassen uns wie ein Sänger nur von unserem Gehör leiten.

Intervalle sind als Klang wahrnehmbar, eng verbunden mit zwei Tönen. Wir führen für das Intervall i, das durch zwei Töne A und B bestimmt ist, die Bezeichnung i = AB ein. Wenn Sie zum Beispiel zuerst eine große Terz gT auf dem Grundton Des intonieren und anschließend auf dem Endton eine kleine Terz kT, dann landen Sie bei As. Nach der nun folgenden Bezeichnung haben Sie zwei Intervalle addiert und eine Quinte Q erhalten: As = (Des + gT) + kT
= Des + (gT+kT) = Des + Qmit Q = gT + kT.

Wir betrachten:

Die Menge T der Töne (genauer: Tonhöhe) A,B, ...
zum Beispiel: A=Des B=As

Die Menge I der Intervalle i, j, ...
zum Beispiel i=gT (große Terz), j=kT (kleine Terz)

Sind A und B zwei Töne, so bestimmen sie eindeutig ein Intervall i.
Wir schreiben dafür: i=AB (A "Grundton", B "Endton").
zum Beispiel ist für A=Es und B=As die Quinte Q=AB bestimmt.

Ist umgkehrt der Grundton A und das Intervall i bekannt, so ist durch i=AB der Endton B eindeutig bestimmt.
Wir schreiben dafür B=A+i. (B Ton, i Intervall)

Intervalle kann man nach folgender Vorschrift addieren:
Ist i=AB und j=BC, dann sei i+j = AC.
Das bedeutet: Singe ich zuerst auf dem Grundton A das Intervall i bis zum Endton B und dann auf dem Grundton B das Intervall j bis C, dann ist das Intervall k=AC eindeutig bestimmt und werde mit i+j bezeichnet: k = i+j.
zum Beispiel gT + kT = Q (Große Terz + kleinen Terz = Quint).

Schließlich kann man Intervalle vergleichen.
Wir schreiben i<j wenn der Endton von j höher als der Endton von i bei gleichem Grundton ist.
zum Beispiel Q < Ok (Quint < Oktav) oder 2Q > Ok (Zwei Quinten > Oktav), wobei wie üblich 2Q=Q+Q bedeutet.

Damit haben wir eine mathematische Struktur (T,I,+,<) für den Tonraum eingeführt (siehe Anhang).

Tonsysteme

Im folgenden werden wir 1. das gleichschwebende, 2. das Quintsystem und 3. das der reinen Stimmung mit einem Anhang über mitteltönige Stimmungen als "Tonräume" beschreiben.

In allen Erweiterungen verwenden wir das Oktavaxiom (ein "Reichhaltigkeitsaxiom": Neben dem Nullintervall soll noch ein zweites existieren.)

Axiom: Es gibt ein Intervall Ok - genannt die Oktave-, verschieden vom Nullintervall, der Prim.

(Mathematisch ist jedes beliebige Intervall geeignet. Ich kenne keine Eigenschaft in diesem System, das die Oktav auszeichnen würde. Man muss also zum Beispiel die Seite eines Monocords halbieren, um den Höreindruck einer Oktav zu erzeugen.)

Weitere Intervalle können mit der Oktavaxiom verglichen werden. Zum Beispiel: Ein bestimmtes Intervall i (denken Sie an die "Quinte") ist kleiner als die Oktav, aber das zweifache Intervall 2·i=i+i ist größer als die Oktav.

1. Der zwölfstufige Tonraum

Dieses System ist mathematisch sehr einfach. Vom Hören kann man es jedoch nicht erschließen, wenn wir nicht Tongenerator und Logarithmentafel oder ähnliches zu Hilfe nehmen.

```
Axiom   Es gibt ein Intervall H -genannt Halbton- so, daß 12·H=Ok
        und jedes Intervall ist ein Vielfaches von H.
```

Somit ist der Intervallraum mit **Z**= Menge der ganzen Zahlen darstellbar als I= **Z**·H={z·H| z ε **Z**} Wählt man willkürlich einen Ton c ε T, dann ist T=c+ **Z**·H={c+z·H|z ε **Z**}

Vom Geigen- oder Trompetenspiel u.s.w her gesehen ist die gleichmäßige Einteilung der Oktave in zwölf gleiche Intervalle jedoch alles andere als trivial ... es ist ein Artefakt.

Vereinfachen wir das Problem und versuchen wir, die Oktave in zwei gleiche Intervalle aufzuteilen.

Gesucht: Intervall i mit 2·i = Ok.

Ein an die gleichschwebenden Stimmung gewöhnte Musiker würde sagen:
C - Fis halbiert die Oktave.

Gehen wir einmal davon aus, dass ein Musiker die reine Oktave, die reine Quint, die reine Terz und alle Intervalle die sich daraus kombinieren lassen, exakt intonieren kann. (siehe das nächste Tonsystem). Dass dies ein guter Sänger, Violinist, Trompeter u. s. w. kann, wird wohl niemand ernsthaft bestreiten.
Wie ist aber C - Fis zu intonieren?

```
Eine große Terz plus ein Ganzton?

Mit Frequenzverhältnissen gerechnet:

i = Terz + Ganzton = Intervall mit dem Frequenzverhältnis  5/4·9/8 = 45 /32.

Dann hat 2·i das Frequenzverhältnis 2025/1024 < 2048/1024 (=Ok)
Zu klein für eine Oktav!!

Man müßte also das gesuchte Intervall i etwas vergrößern, damit 2·i = Ok.

Exakt kann man das nicht.

Und dasselbe gilt erst recht für den Halbton H mit 12·H = Ok.
```

Ich behaupte deshalb: **Der zwölfstufige Tonraum ist allein vom Hören her nicht zu begründen.**

Wer das Gegenteil behauptet, müßte den exakten Halbton mit Musikinstrumenten ohne Berechnung der 12. Wurzel von 2 so intonieren können wie eine Oktave, eine Quint oder eine Terz. (Die mit Hilfe der Obertonreihe einfach zu finden sind.)

Die gleichschwebende Stimmung ist nur eine bequeme Möglichkeit, Tasteninstrumente in allen Tonarten spielbar zu machen. Erst nach der zerfallenden Harmonik der Spätromantik betrachtete man den zwölfstufigen Tonraum als eigenständig.

Historisch gesehen war es ein großes Problem, ohne Stimmgeräten und Frequenzmessern, die erst im 20. Jahrhundert verfügbar waren, Instrumente gleichstufig zu stimmen. Neben dem Gehör wurde etwa das Metronom verwendet, um die Frequenz der Schwebungen zu bestimmen

Andreas Werckmeister (1645-1706), ein Zeitgenosse Buxtehudes und Bachs, preist die Vorzüge der gleichstufigen Stimmung mit Vorbehalt: Die Menschen würden "jubiliren" "wenn ... ein accurates Ohr dieselbe auch ... zu stimmen weiss".

Johann Sebastian Bach stimme sein Clavichord immer selbst und benötigte dafür nie mehr als eine Viertelstunde. Es ist anzunehmen, dass er sie nicht gleichstufig stimmte. Aber seine "wohl temperierte" Stimmung wird sein Geheimnis bleiben. (Quelle Balint Dobozi).

Nachtrag 2006: Das Geheimnis J.S. Bachs ist vielleicht doch gelüftet. Siehe 8. Lektion zur Musiktheorie

2. Das Quintsystem

Sie alle kennen musikalisch die Quinte. Sie werde mit Q bezeichnet.

Im diesem Abschnitt überlegen wir uns. Wie können wir einen kleinsten Tonraum darstellen, der durch die Oktave und die Quinte bestimmt ist?

Wir definieren das Quintsystem folgendermaßen:

```
Definition: (1) Es gibt zwei Intervall Ok (Oktav) und Q (Quint).
            (2) Zu jedem weiteren Intervall i gibt es eindeutig
                bestimmte ganze Zahlen n,m so, daß i=n·Ok+m·Q.
                d.h. jedes Intervall ist eindeutig als
                     Linearkombination von Ok und Q darstellbar.

(2) ist äquivalent zu
(2a)  Jedes Intervall ist Linearkombination von Ok und Q  und (2b)  aus n·Ok=m·Q folgt n=m=0.


Wir schreiben für Intervalle i, j und ganze Zahlen n, m (m>0): n/m i<=j,
falls ni <= mj.

Beispiel: Da (hörpsychologisch) 12 Quinten 7 Oktaven übertreffen, ist
```

die Quinte größer als der zwölfte Teil von 7 Oktaven: Q > $\frac{7}{12}$Ok.

Beachte : $\frac{n}{m}\cdot i$ braucht kein Intervall zu sein. Im vorhergehenden Abschnitt sahen wir ja, dass mit dem Gehör die "halbe Oktav" nicht exakt zu treffen ist.

Axiom (2b) besagt dann: Es ist nicht möglich Q als rationales Vielfaches der Oktave darzustellen.

Unser Intervallraum hat nun die einfache Darstellung I = **Z**·Ok + **Z**·Q (Ok=Oktave; Q=Quinte; **Z** = Menge der ganzen Zahlen)

Dann kann man weitere Intervalle definieren (im Vorgriff werden die Frequenzverhältnisse schon angeben.)

Ganzton	Q=2Q-Ok	(9/8)
Ditonos	2G=4Q-2Ok	(81/64)
Quart	q=Ok-Q	(4/3)
Leimma	L=Quart-Ditonos	(256/243) (=H- siehe unten)
——— für die Theorie ———		
Apotome	A=G-L	(2187/2048)
pyth. Komma	k=12Q-7Ok=A-L	(531441/524288) (Im Vorgriff: 23,46 Cent)

Daraus lässt sich eine Tonleiter bauen: die Pythagoras zugeschriebene Quintenstimmung (Gratzki S.21) (das diatonische Tongeschlecht)

Intervall	G	G	L	G	G	G	L	
Ton	c	d	e	f	g	a	h	c

In der frühen Zweistimmigkeit und den Anfängen der Mehrstimmigkeit ist diese Intonation denkbar.
Quinten klingen in dieser Intonation rein. Mir ist aufgefallen, dass auch die Diskantklausel mit dem pythagoreischen Ganzton in dieser Tonleiter einen besonders guten Klang hat (Mit dem kleinen Ganzton - siehe unten- klänge sie fade).

In der Einstimmigkeit hat die pythagoreische Tonleiter eine gewisse Berechtigung. Die Terz klingt dissonant (scharf).
Bei Tastenistrumente, die bis 1550 so gestimmt wurden, wurde klar, dass bei der Mehrstimmigkeiten Unreinheiten auftraten. Dem begegnete man dadurch, dass man sie nach mitteltönigen Temperaturen stimmte. Eine reine Stimmung der Tasteninstrumente für alle Tonarten war bei einer Beschränkung auf 12 Tasten pro Oktave unmöglich.

Bemerkung zur scharfen Terz der pythagoreischen Stimmung ("Cent" siehe unten).

Mit TTMusik lässt sich das leicht darstellen.

TA	D	Akkord	In Cent
c		ce	386,3
c		ce+	407,8
~		ce	400

Die reine Terz umfasst 387 Cent, die pythagoreische 408 Cent und die gleichschwebende 400 Cent.

3. Das Quint-Terz-System (Die reine Stimmung)

Dieses System wird durch drei Basisvektoren Ok,Q und gT (Ok,Q,gT) bestimmt (Im Vorgriff: In Klammer die Frequenzverhältnisse).

(1) Die Oktav, geschrieben als Vektor	Ok= [1 0 0]	(2/1)
(2) Die Quint, geschrieben	Q = [0 1 0]	(3/2)
(3) Die große Terz, geschrieben	gT = [0 0 1]	(5/4)

Hörpsychologisch beschreibe ich die "reine Stimmung" durch folgende Axiome.

Axiom: Keines der Grundintervalle lässt sich als Linearkombination der übrigen beiden darstellen.

Axiom: Jedes Intervall lässt sich als Summe oder Differenz dieser Grundintervalle schreiben.

Vektorschreibweise: i=[x y z]=x·Ok + y·Q + z·gT
    x,y,z ganze Zahlen (auch negative)
    [x y z] werde der Oktav-Quint-Terz-Vektor genant.

Die Basisintervalle können ersetzt werden durch folgende drei Basisintervalle.

(1) Großer Ganzton G, geschrieben als Vektor	(100)=[-1 2 0]	(9/8)
(2) kleiner Ganzton G-, geschrieben	(010)=[1 -2 1]	(10/9)
(3) Halbton H, geschrieben	(001)=[1 -1 -1]	(16/15)

Umrechnung: Oktav Ok= (322)
            Quint Q = (211)
            Terz gT = (110)

Oder durch folgende drei Basisintervalle (Halbtöne + Korrektur)

(1) Halbton H   H={100}=(001)=[1 -1 -1]   (16/15)
(2) synt. Komma   K={010}=(1 -1 0)=[-2 4 -1]   (81/80) (Im Vorgriff: 21,51 Cent)
(3) 2H-G   k={001}=(-1 0 2)=[3 -4 -2]   (2048/2025)

Rechenbeispiel: Wie setzt sich die kleine Sext ***c-as*** aus Oktaven, Quinten und Terzen zusammen?

c-d-e-f-g-as: G + (G-) + H + G + H
Als (G,G-,H)-Vektor = (Anzahl von G und G- und H) geschrieben: c-as = (2 1 2)
"Zwei große Ganztöne, ein kleiner Ganzton und zwei Halbtöne".

Vektorrechnung:
(2 1 2) = 2·(1 0 0) + (0 1 0) + 2·(0 0 1)
        = 2·[-1 2 0] + [1 -2 1] + 2·[1 -1 -1]
        =[1 0 -1] = "Eine Oktav - eine große Terz"
c-as ist ein Intervall, das 8 Halbtöne umfasst (c-des-d-es-e-f-fis-g-as).
Genaugenommen handelt es sich aber um keine gleichen Halbtöne. Man muss noch die "Korrekturen" K={0 1 0} (synthonisches Komma) und
k={0 0 1} (Ganzton - 2 Halbtöne) anbringen.
Wird diese ausgedrückt als {x y z} muss folgende Gleichung gelöst werden:

{x y z} = x·(0 0 1) + y·(1 -1 0) + z·(-1 0 2) = (2 1 2)

Das lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y - z &= 2 \\ -y &= 1 \\ x + 2\cdot z &= 2 \end{aligned}$$

hat die Lösung: {x y z} = {8 -1 -3), d.h.
c-as liegt 8 Halbtöne auseinander. Der Ton ist jedoch zu hoch.
Zur Korrektur muss man ein synth. Komma und drei mal die (Differenz von zwei Halbtönen und Ganzton) tiefer.

Das Programm TTMusik basiert auf diesem Tonsystem. Jedes Intervall erklingt dort rein. Man muss dabei vorgeben, in welcher Tonart man sich befindet. Zum Beispiel erklingt der Dreiklang ***dfa*** in C-Dur unrein, in F-Dur oder d-moll jedoch rein.

Die Ordnung in Tonsystemen

Was in der Darstellung unseres Tonsystems nicht bestimmbar ist, sind die Größenverhältnisse von Oktav, Quint, Quart u.s.w. Die sind hörpsychologisch vorgegeben. Bei den Pythagoreern rein spekulativ (aber - wie sich später zeigte- als Frequenzverhältnisse). [Bei Euklid "Teilung des Kanons" zum Beispiel

Ok<6G, q<5/2G, und Q<7/2G (siehe Neumeier S.132)]

Wir schreiben für Intervalle i, j und ganze Zahlen z, n (n>0): $\frac{z}{n}i<=j$,

falls zi<=nj ($\frac{z}{n}\cdot i$ braucht jedoch kein Intervall zu sein!)

Die folgende Funktion ist nun eindeutig definiert:

(I = Intervallraum; R = Menge der reellen Zahlen)

$$I \longrightarrow R$$

$$i \longrightarrow m(i)=\sup\left\{ \frac{z}{n} \mid z \in Z;\ n \in N;\ \frac{z}{n}\cdot i<=Ok \right\}$$

zum Beispiel Vergleich Quinte und Oktav.

1. Näherung: 2Q > Ok
2. Näherung: 5Q < 3Ok
3. Näherung: 12Q > 7Ok
4. Näherung: 41Q < 24Ok (noch hörbar)
5. Näherung: 53Q > 31Ok
   (Grenze des hörbaren Unterschiedes erreicht.
    Hörpsychologisch also fast 53Q = 31 Ok)
6. Näherung: 306Q < 179 Ok (rein theoretisch)
7. Näherung   665Q > 398 Ok
...

Berechnung: Siehe Kettenbrüche

Nach dem Satz von Hölder, der für alle archimedisch geordnete Gruppen hergeleitet werden kann, gilt dann:

Die Zuordnung m ist ein Isomorphismus von (I,+,<) in (**R**,+,<), d.h.

Für diese Funktion gilt: (i)   m(o)=0
(ii) m(Ok)=1 und
(iii) m(i+j)=m(i)+m(j) für alle i,j ε I
(iv) aus i<j folgt m(i)<m(j)

Mit dieser Funktion kann ich jedes Intervall als reelles Vielfaches

von Ok betrachtet: $j=m(i)\cdot Ok$ $\quad m(i) \varepsilon \mathbf{R}$.

Die Maßeinheit Cent wird dann nach dem Engländer Alexander John Ellis definiert

durch: 1 Ok =1200 Cent

Das Intervall i hat x Cent, falls $x=m(i)\cdot 1200$,

Bei der gleichmäßigen Stimmung kommt man mit der Einheit

1 Halbton = $\frac{1}{12}$ Oktav aus.

Ich kann sogar ein "Zentimetermaß" für Intervalle einführen. Setzte ich: 1 Einheit = 1 Oktave, dann ist zum Beispiel durch Q = 0,585 [genau Q =lb(3/2)]zum Ausdruck gebracht, dass Q das 0,585-te Vielfache einer Oktav ist.

Dann ist i mit m(i) identifiziert. Die Zahl 0 die Prim und 1 ist die Oktave.

In der reinen Stimmung sind jedoch fast alle Intervalle inkommensurabel zur Oktave ,d.h. m(i) ist irrational.

Die Verwendung der reellen Zahlen ist hier ein mathematisches Artefakt: Jede Näherung (zum Beispiel die ganzzahlige) in Cent lässt keine Rückschlüsse mehr zu, wie sich das Intervall aus Oktaven, Quinten und Terzen zusammensetzt.

Geeigneter ist hier ein Isomorphismus f von $(I,+,<)$ in $(\mathbf{R}+,\cdot,<)$,
wobei $\mathbf{R}+$ die Menge der positiven reellen Zahlen bezeichnet.

Es gilt also:

(i) $f(0)=1$
(ii) $f(Ok)=2$ und
(iii) $f(i+j)=f(i)\cdot f(j)$ für alle $i,j \varepsilon I$
(iv) aus $i<j$ folgt $f(i)<f(j)$

Der Zusammenhang der Funktionen m und f ist dann folgender

$f(i)=2^{m(i)}$ $\quad m(i)=lb(f(i)) = \frac{lg(f(i))}{lg2}$

(lb ist der Logarithmus zur Basis 2, lg der Logarithmus zur Basis 10).

Modern gesprochen ist f(i) das Frequenzverhältnis des Intervalls i und m(i) das Maß des Intervalls in der oben angesprochenen additiven Struktur der Intervalle. Multipliziert man m(i) mit 1200, so erhält man die Angabe des Intervalls in *Cent*.

Die klassische Umrechnung werde an folgenden Beispielen erläutert:

Die **Quinte**: Frequenzverhältnis $f(Q)= \frac{3}{2}$, $m(i) = lb\ \frac{3}{2} = 0,585 = 702$ Cent

mit Cent = $\frac{1}{1200}$. (Analog zu 0,25 = 25% mit % = $\frac{1}{100}$.)

Das **pythagoreische Komma** (12 Quinten aufwärts 7 Oktave abwärts):

$f(12Q-7Ok) = \frac{1,5^{12}}{2^7} = 1,0136$ (klassisches Frequenzverhältnis).

$m(12Q-7Ok)=12\cdot m(Q)-7\cdot m(Ok)=12\cdot lb\frac{3}{2} - 7\cdot lb(2) = 0,01955 = 23,46$ Cent.

Erinnern Sie sich noch an die Logarithmengesetze? Dann ist auch

folgende Beziehung klar: $m(12Q-7Ok) = lb\ \frac{1.5^{12}}{2^7} = 12\cdot lb\frac{3}{2} - 7\cdot lb2$,

d.h. Bei Frequenzverhältnissen wird multiplikativ gerechnet, bei Centangaben additiv!

Das **Terzkomma** (Zwei Ganztöne aufwärts eine große Terz abwärts):

$f(2G - gT) = \frac{(9/8)^2}{5/4} = \frac{81}{80} = 1,0125$ (klassisches Frequenzverhältnis).

$m(2G - gT) = 2\cdot lb(9/8) - lb(5/4) = 0,017\ 921 = 21,5$ Cent.

Zuordnung der Verhältnissen aus der Obertonreihe

Modern sind Tönen Frequenzen und Intervallen Frequenzverhältnisse zugeordnet. Diese Verhältnisse erhalten wir hier ganz natürlich in unserem Tonraum durch die Obertonreihe.

Im folgenden sei $(T,I,<)$ der Quint-Terz-Tonraum.

Jedes Intervall i hat dann die Darstellung $i=xOk+yQ+zgT=[x\ y\ z]$ für ganze Zahlen x,y und z.

Wir betrachten den Isomorphismus f von $(I,+,<)$ in $(\mathbf{Q}+,\cdot,<)$ (siehe oben).

Aus der Obertonreihe erhalten wir (ohne Umwege über die Funktion m):

$f(Ok)=2$
$f(Ok+Q)=3$ $\quad \rightarrow f(Q)=3/f(Ok)=3/2$

f(2Ok)=4
f(2Ok+gT)=5 -> f(gT)=5/f(2Ok)=5/4

Mathematisch sind das Axiome, die wir zusätzlich fordern.

Mit Hilfe unserer Basisvektoren

$f(Ok)=f[1\ 0\ 0]=2$, $f(Q)=f[0\ 1\ 0]=\frac{3}{2}$ und $f(gT)=f[0\ 0\ 1]=\frac{5}{4}$

folgt daraus:

$f[x\ y\ z]=2^x\cdot(\frac{3}{2})^y\cdot(\frac{5}{4})^z$ (x,y,z ganze Zahlen).

Schon die Pythagoreer ordneten den Intervallen Verhältnisse zu.

Modern gesprochen ordnen wir jedem Intervall sein Frequenzverhältnis zu.

Der Wertebereich dieser Abbildung ist $ZDF=\{2^x\cdot3^y\cdot5^z \mid x,y,z\ \varepsilon\ \mathbf{Z}\}$

(Z_weierpotenzen,D_reierpotenzen und F_ünferpotenzen).

Die Umkehrfunktion erhalten wir ohne Logarithmen folgendermaßen

aus der Obertonreihe:

$\overline{f}(2)=[1\ 0\ 0]$, $\overline{f}(3)=[1\ 1\ 0]$ und $\overline{f}(5)=[2\ 0\ 1]$, somit

$\overline{f}(2^x\cdot3^y\cdot5^z)=[x\ 0\ 0]+[y\ y\ 0]+[2z\ 0\ z]=[x+y+2z\ y\ z]$

Bsp.: $\overline{f}(\frac{81}{80})=\overline{f}(\frac{3\cdot3\cdot3\cdot3}{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot5})=-4[1\ 0\ 0]+4[1\ 1\ 0]-[2\ 0\ 1]=[-2\ 4\ -1]$

d.h. zwei Oktaven abwärts 4 Quinten aufwärts 1 Terz abwärts.

c' ⟶C⟶e'+ ⟶c'+ (syntonisches Komma)

Anhang: Ein Axiomensystem für den Tonraum

Wir betrachten den Tonraum (T,I,+,<).
T=Menge der Töne (genauer: Tonhöhe)
Variablen von Tönen werden mit großen Buchstaben A,B,C,.. geschrieben.

I = Menge der Intervalle
Variablen von Intervallen werden mit kleinen Buchstaben i,j,... geschrieben.

Nun folgen 11 Axiome für diese Struktur ähnlich den Axiomen des affinen Raumes. Die Töne A, B ... entsprechen den Punkten, die Intervalle i=AB ... den Vektoren.

Zuerst wird die Struktur der Intervalle beschrieben:
Die Menge der Intervalle I ist bez. '+' eine kommutative archimedisch geordnete Gruppe.
D.h. es gelten die Gesetze (1) bis (8):

(1) Abgeschlossenheit: Für zwei Intervalle i und j gilt: i+j ist wieder ein Intervall [zum Beispiel Quart + Terz =Sext]
(2) Assoziativgesetz: (i+j)+k=i+(j+k)
(3) Kommutativgesetz: i+j=j+i
(4) Existenz des Nullelementes und Inversen:
i+x=j ist stets eindeutig lösbar, geschrieben x=j-i
(Insbesondere gibt es das Nullintervall [Prim] o: i+o=i
und zu jedem Intervall i das inverse Intervall -i mit
i+(-i)=o)
(5) Trichotomie: Stets gilt: i<j, i=j oder i>j
(6) Transitiv: Aus i<j und j<k folgt i<k
(7) Monotonie: Aus i<j folgt i+k<j+k
(8) Archimedisches Gesetz: Stets gibt es zu Intervallen i und j mit 0<i<j eine natürliche Zahl n so, dass n·i>j, wobei man das Intervall n·i durch n-maliges Addieren des Intervalls i erhält.

Nun wird die Struktur der Töne beschrieben:
T ist "affiner" Raum über I.
D.h. Es gelten die folgenden Gesetze (9), (10) und (11).

(9) Je zwei Töne A und B bestimmen genau ein Intervall i,
geschrieben i=AB [oder wie Vektoren AB mit Pfeil darüber]
[Auf diese Weise kann ich erst jemanden das Intervall mitteilen, sinnlich ist das Intervall ein Klang]
(Alternativ könnte man auch wie bei Ortsvektoren i=B-A schreiben).
(10) Ein Ton A und ein Intervall i bestimmen genau einen Ton B
so, dass i=AB, geschrieben B=A+i.
[Achtung: A+i ist eine andere Addition als i+j!]
[Allein mit dem Gehör finde ich zu einem gegeben Ton den Ton, der zum Beispiel

eine große Terz höher liegt]
Also: **i=AB <-> B=A+i**

(11) A+(i+j)=(A+i)+j für Töne A und Intervalle i und j
("gemischtes" Assoziativgesetz.)
[zum Beispiel Oft findet man den Ton, der eine Quinte höher liegt, mit Hilfe des Dur-Dreiklanges: zuerst wird die große Terz, dann die kleine Terz angesetzt].

(11A) Alternativ: AB+BC=AC

Beweis der Gleichwertigkeit:

Setze B=A+i, d.h. i=AB, und C=B+j, d.h. j=BC.
"=>" Sei A+(i+j)=(A+i)+j für alle A ε T und i,j ε I.
Dann folgt: A+(i+j)=(A+i)+j (nach (11))
= B+ j=C.
Somit AC=i+j=AB+BC
"<=" Sei AB+BC=AC für alle A,B,C ε T
Gegeben sei A ε T und i,j El I.
Setze B=A+i und C=B+j, d.h. i=AB und j=BC. Dann gilt:
(A+i)+j=B+j=C und A+(i+j)=A+(AB+BC)=A+AC=C. Somit:
A+(i+j)=(A+i)+j
q.e.d.

Lemma: A+o=A, wobei o das Nullintervall ist; d.h. AA=o.

Beweis: Nach (11A) gilt: AA=AA+AA -> AA=o

Lemma: BA=-AB Bew.: AB+BA=o => BA=-AB

Bemerkung: In T kann man auf folgende Weise noch eine **Ordnung**definieren:

A<B <=> AB > o (siehe Axiom 4; AB ist das den Tönen A und B zugeordnete Intervall)

Hörpsychologisch: Der Ton B erklingt " **höher**" als der Ton A.

Axiome brauchen wir für diese Relation nicht, da alles über Größenverhältnisse auf Intervalle zurückgeführt werden kann.

Hinweis: T ist "geordneter affiner" Raum über dem "Intervallraum" I, wobei I diesmal kein Vektorraum - wie bei affinen Räumen üblich- sondern eine kommutative archimedisch geordnete Gruppe ist.

Man beachte:
Nur zwei Intervalle oder ein Ton und ein Intervall können addiert werden, nicht jedoch zwei Töne! (Man könnte - wie bei affinen Räumen- von "Ortsintervallen" sprechen):
Wird in T ein Ton -zum Beispiel A- als Basis genommen, dann ist jeder weitere Ton X durch das Intervall i=AX eindeutig bestimmt und umgekehrt jedes Intervall i durch den Ton X=A+i.
Ein gleichwertiges Axiomensystem ist auch durch eine Äquivalenzrelation auf Tonpaaren zu bewerkstelligen.
Zwei Tonpaare (A,B) und (C,D) sind äquivalent, wenn Ihnen dasselbe Intervall zugeordnet wird: (A,B)~(C,D) <-> AB = CD (siehe oben Axiom 9).

Bemerkung:
Nach dem Satz von Hölder ist der Intervallraum (I,+,<) isomorph zu einer Teilgruppe von (R,+,<).
Mit heutigem physikalischen Kenntnisstand über Frequenzverhältnisse und dem Logarithmus ist das klar. Davon machen wir aber keinen Gebrauch, da die axiomatische Betrachtungsweise wesentlich intuitiver ist.

Literatur:

Wilfried Neumaier: Was ist ein Tonsystem.
Quellen und Studien zur Musikgeschichte von der Antike bis in die Gegenwart Nr.9
Verlag Peter Lang. Frankfurth a.M · Bern · New York 1986

Bettina Gratzki: Die reine Intonation im Chorgesang.
Verlag für systematische Musikwissenschaft GmbH Bonn 1993

Hermann von Helmholtz Die Lehre von den Tonempfindungen
Verlag Friedrich Vieweg, Braunschweig 1896.

Ludwig Riemann Populäre Darstellung der Akustik in Beziehung zur Musik.
Verlag Friedrich Vieweg, Braunschweig ebenfalls 1896.

Weitere mathematische

Intervalle der pythagoreischen, mitteltönigen, reinen und gleichstufigen Stimmung

```
Bezeichnung beim Frequenzverhältnis: w = Frequenzverhältnis der mitteltönigen Quinte
                                     w = 5^(1/4) enspricht 696,578 Cent.
Bezeichnungen bei der (additiven) Berechnung: ok=Oktave (2/1)
                                               q=Quinte (3/2)
                                               t=Terz   (5/4)
                                              mq=mitteltönige Quinte (w=5^(1/4))
```

Alle diese Intervalle, der Größe nach geordnet

Intervalle der pythagoreischen Stimmung

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über Intervalle, die bei der pythagoreischen Stimmung auftreten können. Berechnet wurde jedes der Intervall: [C]-[Cis], [C]-[Des*], [C]-[D], [C]-[Dis*], [C]-[Es], [C]-[E], ..., [Cis]-[Dis*], [Cis]-[Es], [Cis]-[E], [Cis]-[F], [Cis]-[Fis], ..., [Des*]-[Es], [Des*]-[E],..., [D]-[Dis*], [D]-[Es], [D]-[E], ... Die Intervalle wurden dann Größe [in Cent] nach geordnet. Bei gleichen Intervallen wurde nur ein Repräsentant ausgewählt.

Bei der pythagoreischen Stimmung sind die Quinten der Folge [Ges*]-[Des*]-

[As*]-[Es]-[B]-[F]-[C]-[G]-[D]-[A]-[E]-[H]-[Fis]-[Cis]-[Gis]-[Dis*]-[Ais*] rein (Frequenzverhältnis 3/2).

Hinweis: Die Töne [Ges*], [Des*], [As*], [Dis*] und [Ais*] sind auf einer 12-Stufigen Skala nicht vorhanden.

Jedes Intervall ist eindeutig als Summe der zwei Grundintervalle des Quinten-Sytems darstellbar.

- ok = Oktave (Frequenzverhältnis 2/1)
- q = Quinte (Frequenzverhältnis 3/2).

Intervall	Frequenzverh.	in Cent	Berechnung	Intervallbezeichnung
[C]-[Cis]	2187/2048	113,685	7q-4ok	pythagoreische Apotome = pythagoreische ü
[C]-[Des*]	256/243	90,225	-5q+3ok	pythagoreisches Leimma=pythagoreische kle
[C]-[D]	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
[C]-[Dis*]	19683/16384	317,595	9q-5ok	pythagoreische übermäßige Sekunde
[C]-[Es]	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
[C]-[E]	81/64	407,820	4q-2ok	pythagoreisch große Terz = Ditonos
[C]-[F]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
[C]-[Fis]	729/512	611,730	6q-3ok	pythagoreische übermäßge Quarte=pythagore
[C]-[Ges*]	1024/729	588,270	-6q+4ok	pythagoreische verminderte Quinte
[C]-[G]	3/2	701,955	q	Quinte
[C]-[Gis]	6561/4096	815,640	8q-4ok	pythagoreische übermäßge Quinte
[C]-[As*]	128/81	792,180	-4q+3ok	pythagoreische kleine Sexte
[C]-[A]	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
[C]-[Ais*]	59049/32768	1019,550	10q-5ok	pythagoreische übermäßge Sexte
[C]-[B]	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
[C]-[H]	243/128	1109,775	5q-2ok	pythagoreische große Septime
[Cis]-[Des*]	524288/531441	-23,460	-12q+7ok	pythagoreische verminderte Sekunde = - py
[Cis]-[D]	256/243	90,225	-5q+3ok	pythagoreisches Leimma=pythagoreische kle
[Cis]-[Dis*]	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton

[Cis]-[Es]	65536/59049	180,450	-10q+6ok	pythagoreische verminderte Terz
[Cis]-[E]	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
[Cis]-[F]	8192/6561	384,360	-8q+5ok	pythagoreische verminderte Quarte <>
[Cis]-[Fis]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
[Cis]-[Ges*]	2097152/1594323	474,585	-13q+8ok	pythagoreische doppelt verminderte Quinte
[Cis]-[G]	1024/729	588,270	-6q+4ok	pythagoreische verminderte Quinte
[Cis]-[Gis]	3/2	701,955	q	Quinte
[Cis]-[As*]	262144/177147	678,495	-11q+7ok	pythagoreische verminderte Sexte
[Cis]-[A]	128/81	792,180	-4q+3ok	pythagoreische kleine Sexte
[Cis]-[Ais*]	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
[Cis]-[B]	32768/19683	882,405	-9q+6ok	pythagoreische verminderte Septime
[Cis]-[H]	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
[Cis]-[c]	4096/2187	1086,315	-7q+5ok	pythagoreische verminderte Oktave
[Cis]-[des*]	1048576/531441	1176,540	-12q+8ok	pythagoreische verminderte None (=ok-pyth
[Des*]-[D]	2187/2048	113,685	7q-4ok	pythagoreische Apotome = pythagoreische ü
[Des*]-[Dis*]	1570121/1376878	227,370	14q-8ok	pythagoreische doppelt übermäßige Prim <>
[Des*]-[Es]	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
[Des*]-[E]	19683/16384	317,595	9q-5ok	pythagoreische übermäßige Sekunde
[Des*]-[F]	81/64	407,820	4q-2ok	pythagoreisch große Terz = Ditonos
[Des*]-[Fis]	177147/131072	521,505	11q-6ok	pythagoreische übermäßige Terz
[Des*]-[Ges*]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
[Des*]-[G]	729/512	611,730	6q-3ok	pythagoreische übermäßge Quarte=pythagore
[Des*]-[Gis]	1594323/1048576	725,415	13q-7ok	pythagoreische doppelt übermäßge Quarte <
[Des*]-[As*]	3/2	701,955	q	Quinte
[Des*]-[A]	6561/4096	815,640	8q-4ok	pythagoreische übermäßge Quinte
[Des*]-[Ais*]	803212/469571	929,325	15q-8ok	pythagoreische doppelt übermäßge Quinte <
[Des*]-[B]	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
[Des*]-[H]	59049/32768	1019,550	10q-5ok	pythagoreische übermäßge Sexte
[Des*]-[c]	243/128	1109,775	5q-2ok	pythagoreische große Septime
[D]-[Dis*]	2187/2048	113,685	7q-4ok	pythagoreische Apotome = pythagoreische ü
[D]-[Es]	256/243	90,225	-5q+3ok	pythagoreisches Leimma=pythagoreische kle
[D]-[E]	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
[D]-[F]	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
[D]-[Fis]	81/64	407,820	4q-2ok	pythagoreisch große Terz = Ditonos
[D]-[Ges*]	8192/6561	384,360	-8q+5ok	pythagoreische verminderte Quarte <>
[D]-[G]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte

[D]-[Gis]	729/512	611,730	6q-3ok	pythagoreische übermäßge Quarte=pythagore
[D]-[As*]	1024/729	588,270	-6q+4ok	pythagoreische verminderte Quinte
[D]-[A]	3/2	701,955	q	Quinte
[D]-[Ais*]	6561/4096	815,640	8q-4ok	pythagoreische übermäßge Quinte
[D]-[B]	128/81	792,180	-4q+3ok	pythagoreische kleine Sexte
[D]-[H]	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
[D]-[c]	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
[D]-[cis]	243/128	1109,775	5q-2ok	pythagoreische große Septime
[D]-[des*]	4096/2187	1086,315	-7q+5ok	pythagoreische verminderte Oktave
[Dis*]-[Es]	524288/531441	-23,460	-12q+7ok	pythagoreische verminderte Sekunde = - py
[Dis*]-[E]	256/243	90,225	-5q+3ok	pythagoreisches Leimma=pythagoreische kle
[Dis*]-[F]	65536/59049	180,450	-10q+6ok	pythagoreische verminderte Terz
[Dis*]-[Fis]	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
[Dis*]-[Ges*]	469571/401606	270,675	-15q+9ok	pythagoreische doppelt verminderte Quarte
[Dis*]-[G]	8192/6561	384,360	-8q+5ok	pythagoreische verminderte Quarte <>
[Dis*]-[Gis]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
[Dis*]-[As*]	2097152/1594323	474,585	-13q+8ok	pythagoreische doppelt verminderte Quinte
[Dis*]-[A]	1024/729	588,270	-6q+4ok	pythagoreische verminderte Quinte
[Dis*]-[Ais*]	3/2	701,955	q	Quinte
[Dis*]-[B]	262144/177147	678,495	-11q+7ok	pythagoreische verminderte Sexte
[Dis*]-[H]	128/81	792,180	-4q+3ok	pythagoreische kleine Sexte
[Dis*]-[c]	32768/19683	882,405	-9q+6ok	pythagoreische verminderte Septime
[Dis*]-[cis]	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
[Dis*]-[des*]	1408713/803212	972,630	-14q+9ok	pythagoreische doppelt verminderte Oktave
[Dis*]-[d]	4096/2187	1086,315	-7q+5ok	pythagoreische verminderte Oktave
[Dis*]-[es]	1048576/531441	1176,540	-12q+8ok	pythagoreische verminderte None (=ok-pyth
[Es]-[E]	2187/2048	113,685	7q-4ok	pythagoreische Apotome = pythagoreische ü
[Es]-[F]	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
[Es]-[Fis]	19683/16384	317,595	9q-5ok	pythagoreische übermäßige Sekunde
[Es]-[Ges*]	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
[Es]-[G]	81/64	407,820	4q-2ok	pythagoreisch große Terz = Ditonos
[Es]-[Gis]	177147/131072	521,505	11q-6ok	pythagoreische übermäßige Terz
[Es]-[As*]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
[Es]-[A]	729/512	611,730	6q-3ok	pythagoreische übermäßge Quarte=pythagore
[Es]-[Ais*]	1594323/1048576	725,415	13q-7ok	pythagoreische doppelt übermäßge Quarte <
[Es]-[B]	3/2	701,955	q	Quinte

[Es]-[H]	6561/4096	815,640	8q-4ok	pythagoreische übermäßge Quinte
[Es]-[c]	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
[Es]-[cis]	59049/32768	1019,550	10q-5ok	pythagoreische übermäßge Sexte
[Es]-[des*]	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
[Es]-[d]	243/128	1109,775	5q-2ok	pythagoreische große Septime
[E]-[F]	256/243	90,225	-5q+3ok	pythagoreisches Leimma=pythagoreische kle
[E]-[Fis]	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
[E]-[Ges*]	65536/59049	180,450	-10q+6ok	pythagoreische verminderte Terz
[E]-[G]	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
[E]-[Gis]	81/64	407,820	4q-2ok	pythagoreisch große Terz = Ditonos
[E]-[As*]	8192/6561	384,360	-8q+5ok	pythagoreische verminderte Quarte <>
[E]-[A]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
[E]-[Ais*]	729/512	611,730	6q-3ok	pythagoreische übermäßge Quarte=pythagore
[E]-[B]	1024/729	588,270	-6q+4ok	pythagoreische verminderte Quinte
[E]-[H]	3/2	701,955	q	Quinte
[E]-[c]	128/81	792,180	-4q+3ok	pythagoreische kleine Sexte
[E]-[cis]	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
[E]-[des*]	32768/19683	882,405	-9q+6ok	pythagoreische verminderte Septime
[E]-[d]	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
[E]-[dis*]	243/128	1109,775	5q-2ok	pythagoreische große Septime
[E]-[es]	4096/2187	1086,315	-7q+5ok	pythagoreische verminderte Oktave
[F]-[Fis]	2187/2048	113,685	7q-4ok	pythagoreische Apotome = pythagoreische ü
[F]-[Ges*]	256/243	90,225	-5q+3ok	pythagoreisches Leimma=pythagoreische kle
[F]-[G]	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
[F]-[Gis]	19683/16384	317,595	9q-5ok	pythagoreische übermäßige Sekunde
[F]-[As*]	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
[F]-[A]	81/64	407,820	4q-2ok	pythagoreisch große Terz = Ditonos
[F]-[Ais*]	177147/131072	521,505	11q-6ok	pythagoreische übermäßige Terz
[F]-[B]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
[F]-[H]	729/512	611,730	6q-3ok	pythagoreische übermäßge Quarte=pythagore
[F]-[c]	3/2	701,955	q	Quinte
[F]-[cis]	6561/4096	815,640	8q-4ok	pythagoreische übermäßge Quinte
[F]-[des*]	128/81	792,180	-4q+3ok	pythagoreische kleine Sexte
[F]-[d]	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
[F]-[dis*]	59049/32768	1019,550	10q-5ok	pythagoreische übermäßge Sexte
[F]-[es]	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime

[F]-[e]	243/128	1109,775	5q-2ok	pythagoreische große Septime
[Fis]-[Ges*]	524288/531441	-23,460	-12q+7ok	pythagoreische verminderte Sekunde = - py
[Fis]-[G]	256/243	90,225	-5q+3ok	pythagoreisches Leimma=pythagoreische kle
[Fis]-[Gis]	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
[Fis]-[As*]	65536/59049	180,450	-10q+6ok	pythagoreische verminderte Terz
[Fis]-[A]	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
[Fis]-[Ais*]	81/64	407,820	4q-2ok	pythagoreisch große Terz = Ditonos
[Fis]-[B]	8192/6561	384,360	-8q+5ok	pythagoreische verminderte Quarte <>
[Fis]-[H]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
[Fis]-[c]	1024/729	588,270	-6q+4ok	pythagoreische verminderte Quinte
[Fis]-[cis]	3/2	701,955	q	Quinte
[Fis]-[des*]	262144/177147	678,495	-11q+7ok	pythagoreische verminderte Sexte
[Fis]-[d]	128/81	792,180	-4q+3ok	pythagoreische kleine Sexte
[Fis]-[dis*]	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
[Fis]-[es]	32768/19683	882,405	-9q+6ok	pythagoreische verminderte Septime
[Fis]-[e]	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
[Fis]-[f]	4096/2187	1086,315	-7q+5ok	pythagoreische verminderte Oktave
[Fis]-[ges*]	1048576/531441	1176,540	-12q+8ok	pythagoreische verminderte None (=ok-pyth
[Ges*]-[G]	2187/2048	113,685	7q-4ok	pythagoreische Apotome = pythagoreische ü
[Ges*]-[Gis]	1570121/1376878	227,370	14q-8ok	pythagoreische doppelt übermäßige Prim <>
[Ges*]-[As*]	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
[Ges*]-[A]	19683/16384	317,595	9q-5ok	pythagoreische übermäßige Sekunde
[Ges*]-[Ais*]	602409/469571	431,280	16q-9ok	pythagoreische doppelt übermäßige Sekunde
[Ges*]-[B]	81/64	407,820	4q-2ok	pythagoreisch große Terz = Ditonos
[Ges*]-[H]	177147/131072	521,505	11q-6ok	pythagoreische übermäßige Terz
[Ges*]-[c]	729/512	611,730	6q-3ok	pythagoreische übermäßge Quarte=pythagore
[Ges*]-[cis]	1594323/1048576	725,415	13q-7ok	pythagoreische doppelt übermäßge Quarte <
[Ges*]-[des*]	3/2	701,955	q	Quinte
[Ges*]-[d]	6561/4096	815,640	8q-4ok	pythagoreische übermäßge Quinte
[Ges*]-[dis*]	803212/469571	929,325	15q-8ok	pythagoreische doppelt übermäßge Quinte <
[Ges*]-[es]	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
[Ges*]-[e]	59049/32768	1019,550	10q-5ok	pythagoreische übermäßge Sexte
[Ges*]-[f]	243/128	1109,775	5q-2ok	pythagoreische große Septime
[G]-[Gis]	2187/2048	113,685	7q-4ok	pythagoreische Apotome = pythagoreische ü
[G]-[As*]	256/243	90,225	-5q+3ok	pythagoreisches Leimma=pythagoreische kle
[G]-[A]	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton

[G]-[Ais*]	19683/16384	317,595	9q-5ok	pythagoreische übermäßige Sekunde
[G]-[B]	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
[G]-[H]	81/64	407,820	4q-2ok	pythagoreisch große Terz = Ditonos
[G]-[c]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
[G]-[cis]	729/512	611,730	6q-3ok	pythagoreische übermäßge Quarte=pythagore
[G]-[des*]	1024/729	588,270	-6q+4ok	pythagoreische verminderte Quinte
[G]-[d]	3/2	701,955	q	Quinte
[G]-[dis*]	6561/4096	815,640	8q-4ok	pythagoreische übermäßge Quinte
[G]-[es]	128/81	792,180	-4q+3ok	pythagoreische kleine Sexte
[G]-[e]	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
[G]-[f]	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
[G]-[fis]	243/128	1109,775	5q-2ok	pythagoreische große Septime
[G]-[ges*]	4096/2187	1086,315	-7q+5ok	pythagoreische verminderte Oktave
[Gis]-[As*]	524288/531441	-23,460	-12q+7ok	pythagoreische verminderte Sekunde = - py
[Gis]-[A]	256/243	90,225	-5q+3ok	pythagoreisches Leimma=pythagoreische kle
[Gis]-[Ais*]	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
[Gis]-[B]	65536/59049	180,450	-10q+6ok	pythagoreische verminderte Terz
[Gis]-[H]	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
[Gis]-[c]	8192/6561	384,360	-8q+5ok	pythagoreische verminderte Quarte <>
[Gis]-[cis]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
[Gis]-[des*]	2097152/1594323	474,585	-13q+8ok	pythagoreische doppelt verminderte Quinte
[Gis]-[d]	1024/729	588,270	-6q+4ok	pythagoreische verminderte Quinte
[Gis]-[dis*]	3/2	701,955	q	Quinte
[Gis]-[es]	262144/177147	678,495	-11q+7ok	pythagoreische verminderte Sexte
[Gis]-[e]	128/81	792,180	-4q+3ok	pythagoreische kleine Sexte
[Gis]-[f]	32768/19683	882,405	-9q+6ok	pythagoreische verminderte Septime
[Gis]-[fis]	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
[Gis]-[ges*]	1408713/803212	972,630	-14q+9ok	pythagoreische doppelt verminderte Oktave
[Gis]-[g]	4096/2187	1086,315	-7q+5ok	pythagoreische verminderte Oktave
[Gis]-[as*]	1048576/531441	1176,540	-12q+8ok	pythagoreische verminderte None (=ok-pyth
[As*]-[A]	2187/2048	113,685	7q-4ok	pythagoreische Apotome = pythagoreische ü
[As*]-[Ais*]	1570121/1376878	227,370	14q-8ok	pythagoreische doppelt übermäßige Prim <>
[As*]-[B]	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
[As*]-[H]	19683/16384	317,595	9q-5ok	pythagoreische übermäßige Sekunde
[As*]-[c]	81/64	407,820	4q-2ok	pythagoreisch große Terz = Ditonos
[As*]-[cis]	177147/131072	521,505	11q-6ok	pythagoreische übermäßige Terz

[As*]-[des*]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
[As*]-[d]	729/512	611,730	6q-3ok	pythagoreische übermäßge Quarte=pythagore
[As*]-[dis*]	1594323/1048576	725,415	13q-7ok	pythagoreische doppelt übermäßge Quarte <
[As*]-[es]	3/2	701,955	q	Quinte
[As*]-[e]	6561/4096	815,640	8q-4ok	pythagoreische übermäßge Quinte
[As*]-[f]	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
[As*]-[fis]	59049/32768	1019,550	10q-5ok	pythagoreische übermäßge Sexte
[As*]-[ges*]	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
[As*]-[g]	243/128	1109,775	5q-2ok	pythagoreische große Septime
[A]-[Ais*]	2187/2048	113,685	7q-4ok	pythagoreische Apotome = pythagoreische ü
[A]-[B]	256/243	90,225	-5q+3ok	pythagoreisches Leimma=pythagoreische kle
[A]-[H]	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
[A]-[c]	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
[A]-[cis]	81/64	407,820	4q-2ok	pythagoreisch große Terz = Ditonos
[A]-[des*]	8192/6561	384,360	-8q+5ok	pythagoreische verminderte Quarte <>
[A]-[d]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
[A]-[dis*]	729/512	611,730	6q-3ok	pythagoreische übermäßge Quarte=pythagore
[A]-[es]	1024/729	588,270	-6q+4ok	pythagoreische verminderte Quinte
[A]-[e]	3/2	701,955	q	Quinte
[A]-[f]	128/81	792,180	-4q+3ok	pythagoreische kleine Sexte
[A]-[fis]	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
[A]-[ges*]	32768/19683	882,405	-9q+6ok	pythagoreische verminderte Septime
[A]-[g]	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
[A]-[gis]	243/128	1109,775	5q-2ok	pythagoreische große Septime
[A]-[as*]	4096/2187	1086,315	-7q+5ok	pythagoreische verminderte Oktave
[Ais*]-[B]	524288/531441	-23,460	-12q+7ok	pythagoreische verminderte Sekunde = - py
[Ais*]-[H]	256/243	90,225	-5q+3ok	pythagoreisches Leimma=pythagoreische kle
[Ais*]-[c]	65536/59049	180,450	-10q+6ok	pythagoreische verminderte Terz
[Ais*]-[cis]	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
[Ais*]-[des*]	469571/401606	270,675	-15q+9ok	pythagoreische doppelt verminderte Quarte
[Ais*]-[d]	8192/6561	384,360	-8q+5ok	pythagoreische verminderte Quarte <>
[Ais*]-[dis*]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
[Ais*]-[es]	2097152/1594323	474,585	-13q+8ok	pythagoreische doppelt verminderte Quinte
[Ais*]-[e]	1024/729	588,270	-6q+4ok	pythagoreische verminderte Quinte
[Ais*]-[f]	262144/177147	678,495	-11q+7ok	pythagoreische verminderte Sexte
[Ais*]-[fis]	128/81	792,180	-4q+3ok	pythagoreische kleine Sexte

[Ais*]-[ges*]	939142/602409	768,720	-16q+10ok	pythagoreische doppelt verminderte Septim
[Ais*]-[g]	32768/19683	882,405	-9q+6ok	pythagoreische verminderte Septime
[Ais*]-[gis]	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
[Ais*]-[as*]	1408713/803212	972,630	-14q+9ok	pythagoreische doppelt verminderte Oktave
[Ais*]-[a]	4096/2187	1086,315	-7q+5ok	pythagoreische verminderte Oktave
[Ais*]-[b]	1048576/531441	1176,540	-12q+8ok	pythagoreische verminderte None (=ok-pyth
[B]-[H]	2187/2048	113,685	7q-4ok	pythagoreische Apotome = pythagoreische ü
[B]-[c]	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
[B]-[cis]	19683/16384	317,595	9q-5ok	pythagoreische übermäßige Sekunde
[B]-[des*]	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
[B]-[d]	81/64	407,820	4q-2ok	pythagoreisch große Terz = Ditonos
[B]-[dis*]	177147/131072	521,505	11q-6ok	pythagoreische übermäßige Terz
[B]-[es]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
[B]-[e]	729/512	611,730	6q-3ok	pythagoreische übermäßge Quarte=pythagore
[B]-[f]	3/2	701,955	q	Quinte
[B]-[fis]	6561/4096	815,640	8q-4ok	pythagoreische übermäßge Quinte
[B]-[ges*]	128/81	792,180	-4q+3ok	pythagoreische kleine Sexte
[B]-[g]	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
[B]-[gis]	59049/32768	1019,550	10q-5ok	pythagoreische übermäßge Sexte
[B]-[as*]	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
[B]-[a]	243/128	1109,775	5q-2ok	pythagoreische große Septime
[H]-[c]	256/243	90,225	-5q+3ok	pythagoreisches Leimma=pythagoreische kle
[H]-[cis]	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
[H]-[des*]	65536/59049	180,450	-10q+6ok	pythagoreische verminderte Terz
[H]-[d]	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
[H]-[dis*]	81/64	407,820	4q-2ok	pythagoreisch große Terz = Ditonos
[H]-[es]	8192/6561	384,360	-8q+5ok	pythagoreische verminderte Quarte <>
[H]-[e]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
[H]-[f]	1024/729	588,270	-6q+4ok	pythagoreische verminderte Quinte
[H]-[fis]	3/2	701,955	q	Quinte
[H]-[ges*]	262144/177147	678,495	-11q+7ok	pythagoreische verminderte Sexte
[H]-[g]	128/81	792,180	-4q+3ok	pythagoreische kleine Sexte
[H]-[gis]	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
[H]-[as*]	32768/19683	882,405	-9q+6ok	pythagoreische verminderte Septime
[H]-[a]	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
[H]-[ais*]	243/128	1109,775	5q-2ok	pythagoreische große Septime

Intervalle der mitteltönigen Stimmung

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über Intervalle, die bei der mitteltönigen Stimmung auftreten können. Berechnet wurde jedes der Intervall: (C)-(Cis), (C)-(Des*), (C)-(D), (C)-(Dis*), (C)-(Es), (C)-(E), ..., (Cis)-(Dis*), (Cis)-(Es), (Cis)-(E), (Cis)-(F), (Cis)-(Fis), ..., (Des*)-(Es), (Des*)-(E),..., (D)-(Dis*), (D)-(Es), (D)-(E), ... Die Intervalle wurden dann Größe (in Cent) nach geordnet. Bei gleichen Intervallen wurde nur ein Repräsentant ausgewählt.

Bei der 1/4-Komma mitteltönige Stimmung sind die Quinten der Folge (Ges*)-(Des*)-(As*)-(Es)-(B)-(F)-(C)-(G)-(D)-(A)-(E)-(H)-(Fis)-(Cis)-(Gis)-(Dis*)-(Ais*) um 1/4 des syntonischen Kommas (Frequenzverhältnis 81/80) tiefer als die reine Quinte gestimmt.

Jedes Intervall ist eindeutig als Summe der zwei Grundintervalle des mitteltönig-Quinten-Sytems darstellbar.

- ok=Oktave
- mq= mitteltönige Quinte.

Die Große Terz (C)-(E) ist hier darstellbar als (C)-(E)=4mq-2ok. Die jeweilige Berechnung erscheint in der 4. Spalte.

Intervall	Frequenzverh.	in Cent	Berechnung	Intervallbezeichnung
(C)-(Cis)	(5/16)w^3	76,049	7mq-4ok	chromatischer mitteltöniger Halbton
(C)-(Des*)	(8/25)w^3	117,108	-5mq+3ok	diatonischer mitteltöniger Halbton

(C)-(D)	(1/2)w^2	193,157	2mq-ok	mitteltöniger Ganzton
(C)-(Dis*)	(25/32)w	269,206	9mq-5ok	mitteltönige übermäßige Sekunde
(C)-(Es)	(4/5)w	310,265	-3mq+2ok	mitteltönige kleine Terz
(C)-(E)	5/4	386,314	4mq-2ok	große Terz
(C)-(F)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte
(C)-(Fis)	(5/8)w^2	579,471	6mq-3ok	mitteltönige übermäßige Quarte, mitteltön
(C)-(Ges*)	(16/25)w^2	620,529	-6mq+4ok	mitteltönige verminderte Quinte
(C)-(G)	w	696,578	mq	mitteltönige Quinte
(C)-(Gis)	25/16	772,627	8mq-4ok	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
(C)-(As*)	8/5	813,686	-4mq+3ok	kleine Sexte
(C)-(A)	(1/2)w^3	889,735	3mq-ok	mitteltönige große Sexte
(C)-(Ais*)	(25/32)w^2	965,784	10mq-5ok	mitteltönige übermäßge Sexte
(C)-(B)	(4/5)w^2	1006,843	-2mq+2ok	mitteltönige kleine Septime
(C)-(H)	(5/4)w	1082,892	5mq-2ok	mitteltönige große Septime
(Cis)-(Des*)	128/125	41,059	-12mq+7ok	(größere) verminderte Sekunde =kleine Die
(Cis)-(D)	(8/25)w^3	117,108	-5mq+3ok	diatonischer mitteltöniger Halbton
(Cis)-(Dis*)	(1/2)w^2	193,157	2mq-ok	mitteltöniger Ganzton
(Cis)-(Es)	(64/125)w^2	234,216	-10mq+6ok	mitteltönig verminderte Terz
(Cis)-(E)	(4/5)w	310,265	-3mq+2ok	mitteltönige kleine Terz
(Cis)-(F)	32/25	427,373	-8mq+5ok	verminderte Quarte
(Cis)-(Fis)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte
(Cis)-(Ges*)	(256/625)w^3	544,480	-13mq+8ok	mitteltönig doppelt verminderte Quinte
(Cis)-(G)	(16/25)w^2	620,529	-6mq+4ok	mitteltönige verminderte Quinte
(Cis)-(Gis)	w	696,578	mq	mitteltönige Quinte
(Cis)-(As*)	(128/125)w	737,637	-11mq+7ok	mitteltönig verminderte Sexte
(Cis)-(A)	8/5	813,686	-4mq+3ok	kleine Sexte
(Cis)-(Ais*)	(1/2)w^3	889,735	3mq-ok	mitteltönige große Sexte
(Cis)-(B)	(64/125)w^3	930,794	-9mq+6ok	mitteltönig verminderte Septime
(Cis)-(H)	(4/5)w^2	1006,843	-2mq+2ok	mitteltönige kleine Septime
(Cis)-(c)	(32/25)w	1123,951	-7mq+5ok	mitteltönig verminderte Oktave
(Des*)-(D)	(5/16)w^3	76,049	7mq-4ok	chromatischer mitteltöniger Halbton
(Des*)-(Dis*)	(125/256)w^2	152,098	14mq-8ok	mitteltönige doppelt übermäßige Prim
(Des*)-(Es)	(1/2)w^2	193,157	2mq-ok	mitteltöniger Ganzton
(Des*)-(E)	(25/32)w	269,206	9mq-5ok	mitteltönige übermäßige Sekunde
(Des*)-(F)	5/4	386,314	4mq-2ok	große Terz
(Des*)-(Fis)	(25/64)w^3	462,363	11mq-6ok	mitteltönig übermäßige Terz

(Des*)-(Ges*)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte
(Des*)-(G)	(5/8)w^2	579,471	6mq-3ok	mitteltönige übermäßige Quarte, mitteltön
(Des*)-(Gis)	(125/128)w	655,520	13mq-7ok	mitteltönig doppelt übermäßge Quart
(Des*)-(As*)	w	696,578	mq	mitteltönige Quinte
(Des*)-(A)	25/16	772,627	8mq-4ok	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
(Des*)-(Ais*)	(125/256)w^3	848,676	15mq-8ok	mitteltönig doppelt übermäßge Quinte
(Des*)-(B)	(1/2)w^3	889,735	3mq-ok	mitteltönige große Sexte
(Des*)-(H)	(25/32)w^2	965,784	10mq-5ok	mitteltönige übermäßge Sexte
(Des*)-(c)	(5/4)w	1082,892	5mq-2ok	mitteltönige große Septime
(Des*)-(cis)	125/64	1158,941	12mq-6ok	übermäßige Septime
(D)-(Dis*)	(5/16)w^3	76,049	7mq-4ok	chromatischer mitteltöniger Halbton
(D)-(Es)	(8/25)w^3	117,108	-5mq+3ok	diatonischer mitteltöniger Halbton
(D)-(E)	(1/2)w^2	193,157	2mq-ok	mitteltöniger Ganzton
(D)-(F)	(4/5)w	310,265	-3mq+2ok	mitteltönige kleine Terz
(D)-(Fis)	5/4	386,314	4mq-2ok	große Terz
(D)-(Ges*)	32/25	427,373	-8mq+5ok	verminderte Quarte
(D)-(G)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte
(D)-(Gis)	(5/8)w^2	579,471	6mq-3ok	mitteltönige übermäßige Quarte, mitteltön
(D)-(As*)	(16/25)w^2	620,529	-6mq+4ok	mitteltönige verminderte Quinte
(D)-(A)	w	696,578	mq	mitteltönige Quinte
(D)-(Ais*)	25/16	772,627	8mq-4ok	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
(D)-(B)	8/5	813,686	-4mq+3ok	kleine Sexte
(D)-(H)	(1/2)w^3	889,735	3mq-ok	mitteltönige große Sexte
(D)-(c)	(4/5)w^2	1006,843	-2mq+2ok	mitteltönige kleine Septime
(D)-(cis)	(5/4)w	1082,892	5mq-2ok	mitteltönige große Septime
(D)-(des*)	(32/25)w	1123,951	-7mq+5ok	mitteltönig verminderte Oktave
(Dis*)-(Es)	128/125	41,059	-12mq+7ok	(größere) verminderte Sekunde =kleine Die
(Dis*)-(E)	(8/25)w^3	117,108	-5mq+3ok	diatonischer mitteltöniger Halbton
(Dis*)-(F)	(64/125)w^2	234,216	-10mq+6ok	mitteltönig verminderte Terz
(Dis*)-(Fis)	(4/5)w	310,265	-3mq+2ok	mitteltönige kleine Terz
(Dis*)-(Ges*)	(512/625)w	351,324	-15mq+9ok	mitteltönig doppelt verminderte Quarte
(Dis*)-(G)	32/25	427,373	-8mq+5ok	verminderte Quarte
(Dis*)-(Gis)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte
(Dis*)-(As*)	(256/625)w^3	544,480	-13mq+8ok	mitteltönig doppelt verminderte Quinte
(Dis*)-(A)	(16/25)w^2	620,529	-6mq+4ok	mitteltönige verminderte Quinte
(Dis*)-(Ais*)	w	696,578	mq	mitteltönige Quinte

(Dis*)-(B)	(128/125)w	737,637	-11mq+7ok	mitteltönig verminderte Sexte
(Dis*)-(H)	8/5	813,686	-4mq+3ok	kleine Sexte
(Dis*)-(c)	(64/125)w^3	930,794	-9mq+6ok	mitteltönig verminderte Septime
(Dis*)-(cis)	(4/5)w^2	1006,843	-2mq+2ok	mitteltönige kleine Septime
(Dis*)-(des*)	(512/625)w^2	1047,902	-14mq+9ok	mitteltönig doppelt verminderte Oktave
(Dis*)-(d)	(32/25)w	1123,951	-7mq+5ok	mitteltönig verminderte Oktave
(Es)-(E)	(5/16)w^3	76,049	7mq-4ok	chromatischer mitteltöniger Halbton
(Es)-(F)	(1/2)w^2	193,157	2mq-ok	mitteltöniger Ganzton
(Es)-(Fis)	(25/32)w	269,206	9mq-5ok	mitteltönige übermäßige Sekunde
(Es)-(Ges*)	(4/5)w	310,265	-3mq+2ok	mitteltönige kleine Terz
(Es)-(G)	5/4	386,314	4mq-2ok	große Terz
(Es)-(Gis)	(25/64)w^3	462,363	11mq-6ok	mitteltönig übermäßige Terz
(Es)-(As*)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte
(Es)-(A)	(5/8)w^2	579,471	6mq-3ok	mitteltönige übermäßige Quarte, mitteltön
(Es)-(Ais*)	(125/128)w	655,520	13mq-7ok	mitteltönig doppelt übermäßge Quart
(Es)-(B)	w	696,578	mq	mitteltönige Quinte
(Es)-(H)	25/16	772,627	8mq-4ok	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
(Es)-(c)	(1/2)w^3	889,735	3mq-ok	mitteltönige große Sexte
(Es)-(cis)	(25/32)w^2	965,784	10mq-5ok	mitteltönige übermäßge Sexte
(Es)-(des*)	(4/5)w^2	1006,843	-2mq+2ok	mitteltönige kleine Septime
(Es)-(d)	(5/4)w	1082,892	5mq-2ok	mitteltönige große Septime
(Es)-(dis*)	125/64	1158,941	12mq-6ok	übermäßige Septime
(E)-(F)	(8/25)w^3	117,108	-5mq+3ok	diatonischer mitteltöniger Halbton
(E)-(Fis)	(1/2)w^2	193,157	2mq-ok	mitteltöniger Ganzton
(E)-(Ges*)	(64/125)w^2	234,216	-10mq+6ok	mitteltönig verminderte Terz
(E)-(G)	(4/5)w	310,265	-3mq+2ok	mitteltönige kleine Terz
(E)-(Gis)	5/4	386,314	4mq-2ok	große Terz
(E)-(As*)	32/25	427,373	-8mq+5ok	verminderte Quarte
(E)-(A)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte
(E)-(Ais*)	(5/8)w^2	579,471	6mq-3ok	mitteltönige übermäßige Quarte, mitteltön
(E)-(B)	(16/25)w^2	620,529	-6mq+4ok	mitteltönige verminderte Quinte
(E)-(H)	w	696,578	mq	mitteltönige Quinte
(E)-(c)	8/5	813,686	-4mq+3ok	kleine Sexte
(E)-(cis)	(1/2)w^3	889,735	3mq-ok	mitteltönige große Sexte
(E)-(des*)	(64/125)w^3	930,794	-9mq+6ok	mitteltönig verminderte Septime
(E)-(d)	(4/5)w^2	1006,843	-2mq+2ok	mitteltönige kleine Septime

(E)-(dis*)	(5/4)w	1082,892	5mq-2ok	mitteltönige große Septime
(E)-(es)	(32/25)w	1123,951	-7mq+5ok	mitteltönig verminderte Oktave
(F)-(Fis)	(5/16)w^3	76,049	7mq-4ok	chromatischer mitteltöniger Halbton
(F)-(Ges*)	(8/25)w^3	117,108	-5mq+3ok	diatonischer mitteltöniger Halbton
(F)-(G)	(1/2)w^2	193,157	2mq-ok	mitteltöniger Ganzton
(F)-(Gis)	(25/32)w	269,206	9mq-5ok	mitteltönige übermäßige Sekunde
(F)-(As*)	(4/5)w	310,265	-3mq+2ok	mitteltönige kleine Terz
(F)-(A)	5/4	386,314	4mq-2ok	große Terz
(F)-(Ais*)	(25/64)w^3	462,363	11mq-6ok	mitteltönig übermäßige Terz
(F)-(B)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte
(F)-(H)	(5/8)w^2	579,471	6mq-3ok	mitteltönige übermäßige Quarte, mitteltön
(F)-(c)	w	696,578	mq	mitteltönige Quinte
(F)-(cis)	25/16	772,627	8mq-4ok	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
(F)-(des*)	8/5	813,686	-4mq+3ok	kleine Sexte
(F)-(d)	(1/2)w^3	889,735	3mq-ok	mitteltönige große Sexte
(F)-(dis*)	(25/32)w^2	965,784	10mq-5ok	mitteltönige übermäßge Sexte
(F)-(es)	(4/5)w^2	1006,843	-2mq+2ok	mitteltönige kleine Septime
(F)-(e)	(5/4)w	1082,892	5mq-2ok	mitteltönige große Septime
(Fis)-(Ges*)	128/125	41,059	-12mq+7ok	(größere) verminderte Sekunde =kleine Die
(Fis)-(G)	(8/25)w^3	117,108	-5mq+3ok	diatonischer mitteltöniger Halbton
(Fis)-(Gis)	(1/2)w^2	193,157	2mq-ok	mitteltöniger Ganzton
(Fis)-(As*)	(64/125)w^2	234,216	-10mq+6ok	mitteltönig verminderte Terz
(Fis)-(A)	(4/5)w	310,265	-3mq+2ok	mitteltönige kleine Terz
(Fis)-(Ais*)	5/4	386,314	4mq-2ok	große Terz
(Fis)-(B)	32/25	427,373	-8mq+5ok	verminderte Quarte
(Fis)-(H)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte
(Fis)-(c)	(16/25)w^2	620,529	-6mq+4ok	mitteltönige verminderte Quinte
(Fis)-(cis)	w	696,578	mq	mitteltönige Quinte
(Fis)-(des*)	(128/125)w	737,637	-11mq+7ok	mitteltönig verminderte Sexte
(Fis)-(d)	8/5	813,686	-4mq+3ok	kleine Sexte
(Fis)-(dis*)	(1/2)w^3	889,735	3mq-ok	mitteltönige große Sexte
(Fis)-(es)	(64/125)w^3	930,794	-9mq+6ok	mitteltönig verminderte Septime
(Fis)-(e)	(4/5)w^2	1006,843	-2mq+2ok	mitteltönige kleine Septime
(Fis)-(f)	(32/25)w	1123,951	-7mq+5ok	mitteltönig verminderte Oktave
(Ges*)-(G)	(5/16)w^3	76,049	7mq-4ok	chromatischer mitteltöniger Halbton
(Ges*)-(Gis)	(125/256)w^2	152,098	14mq-8ok	mitteltönige doppelt übermäßige Prim

(Ges*)-(As*)	(1/2)w^2	193,157	2mq-ok	mitteltöniger Ganzton
(Ges*)-(A)	(25/32)w	269,206	9mq-5ok	mitteltönige übermäßige Sekunde
(Ges*)-(Ais*)	625/512	345,255	16mq-9ok	mitteltönig doppelt übermäßige Sekunde
(Ges*)-(B)	5/4	386,314	4mq-2ok	große Terz
(Ges*)-(H)	(25/64)w^3	462,363	11mq-6ok	mitteltönig übermäßige Terz
(Ges*)-(c)	(5/8)w^2	579,471	6mq-3ok	mitteltönige übermäßige Quarte, mitteltön
(Ges*)-(cis)	(125/128)w	655,520	13mq-7ok	mitteltönig doppelt übermäßge Quart
(Ges*)-(des*)	w	696,578	mq	mitteltönige Quinte
(Ges*)-(d)	25/16	772,627	8mq-4ok	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
(Ges*)-(dis*)	(125/256)w^3	848,676	15mq-8ok	mitteltönig doppelt übermäßge Quinte
(Ges*)-(es)	(1/2)w^3	889,735	3mq-ok	mitteltönige große Sexte
(Ges*)-(e)	(25/32)w^2	965,784	10mq-5ok	mitteltönige übermäßge Sexte
(Ges*)-(f)	(5/4)w	1082,892	5mq-2ok	mitteltönige große Septime
(Ges*)-(fis)	125/64	1158,941	12mq-6ok	übermäßige Septime
(G)-(Gis)	(5/16)w^3	76,049	7mq-4ok	chromatischer mitteltöniger Halbton
(G)-(As*)	(8/25)w^3	117,108	-5mq+3ok	diatonischer mitteltöniger Halbton
(G)-(A)	(1/2)w^2	193,157	2mq-ok	mitteltöniger Ganzton
(G)-(Ais*)	(25/32)w	269,206	9mq-5ok	mitteltönige übermäßige Sekunde
(G)-(B)	(4/5)w	310,265	-3mq+2ok	mitteltönige kleine Terz
(G)-(H)	5/4	386,314	4mq-2ok	große Terz
(G)-(c)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte
(G)-(cis)	(5/8)w^2	579,471	6mq-3ok	mitteltönige übermäßige Quarte, mitteltön
(G)-(des*)	(16/25)w^2	620,529	-6mq+4ok	mitteltönige verminderte Quinte
(G)-(d)	w	696,578	mq	mitteltönige Quinte
(G)-(dis*)	25/16	772,627	8mq-4ok	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
(G)-(es)	8/5	813,686	-4mq+3ok	kleine Sexte
(G)-(e)	(1/2)w^3	889,735	3mq-ok	mitteltönige große Sexte
(G)-(f)	(4/5)w^2	1006,843	-2mq+2ok	mitteltönige kleine Septime
(G)-(fis)	(5/4)w	1082,892	5mq-2ok	mitteltönige große Septime
(G)-(ges*)	(32/25)w	1123,951	-7mq+5ok	mitteltönig verminderte Oktave
(Gis)-(As*)	128/125	41,059	-12mq+7ok	(größere) verminderte Sekunde =kleine Die
(Gis)-(A)	(8/25)w^3	117,108	-5mq+3ok	diatonischer mitteltöniger Halbton
(Gis)-(Ais*)	(1/2)w^2	193,157	2mq-ok	mitteltöniger Ganzton
(Gis)-(B)	(64/125)w^2	234,216	-10mq+6ok	mitteltönig verminderte Terz
(Gis)-(H)	(4/5)w	310,265	-3mq+2ok	mitteltönige kleine Terz
(Gis)-(c)	32/25	427,373	-8mq+5ok	verminderte Quarte

(Gis)-(cis)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte
(Gis)-(des*)	(256/625)w^3	544,480	-13mq+8ok	mitteltönig doppelt verminderte Quinte
(Gis)-(d)	(16/25)w^2	620,529	-6mq+4ok	mitteltönige verminderte Quinte
(Gis)-(dis*)	w	696,578	mq	mitteltönige Quinte
(Gis)-(es)	(128/125)w	737,637	-11mq+7ok	mitteltönig verminderte Sexte
(Gis)-(e)	8/5	813,686	-4mq+3ok	kleine Sexte
(Gis)-(f)	(64/125)w^3	930,794	-9mq+6ok	mitteltönig verminderte Septime
(Gis)-(fis)	(4/5)w^2	1006,843	-2mq+2ok	mitteltönige kleine Septime
(Gis)-(ges*)	(512/625)w^2	1047,902	-14mq+9ok	mitteltönig doppelt verminderte Oktave
(Gis)-(g)	(32/25)w	1123,951	-7mq+5ok	mitteltönig verminderte Oktave
(As*)-(A)	(5/16)w^3	76,049	7mq-4ok	chromatischer mitteltöniger Halbton
(As*)-(Ais*)	(125/256)w^2	152,098	14mq-8ok	mitteltönige doppelt übermäßige Prim
(As*)-(B)	(1/2)w^2	193,157	2mq-ok	mitteltöniger Ganzton
(As*)-(H)	(25/32)w	269,206	9mq-5ok	mitteltönige übermäßige Sekunde
(As*)-(c)	5/4	386,314	4mq-2ok	große Terz
(As*)-(cis)	(25/64)w^3	462,363	11mq-6ok	mitteltönig übermäßige Terz
(As*)-(des*)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte
(As*)-(d)	(5/8)w^2	579,471	6mq-3ok	mitteltönige übermäßige Quarte, mitteltön
(As*)-(dis*)	(125/128)w	655,520	13mq-7ok	mitteltönig doppelt übermäßge Quart
(As*)-(es)	w	696,578	mq	mitteltönige Quinte
(As*)-(e)	25/16	772,627	8mq-4ok	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
(As*)-(f)	(1/2)w^3	889,735	3mq-ok	mitteltönige große Sexte
(As*)-(fis)	(25/32)w^2	965,784	10mq-5ok	mitteltönige übermäßge Sexte
(As*)-(ges*)	(4/5)w^2	1006,843	-2mq+2ok	mitteltönige kleine Septime
(As*)-(g)	(5/4)w	1082,892	5mq-2ok	mitteltönige große Septime
(As*)-(gis)	125/64	1158,941	12mq-6ok	übermäßige Septime
(A)-(Ais*)	(5/16)w^3	76,049	7mq-4ok	chromatischer mitteltöniger Halbton
(A)-(B)	(8/25)w^3	117,108	-5mq+3ok	diatonischer mitteltöniger Halbton
(A)-(H)	(1/2)w^2	193,157	2mq-ok	mitteltöniger Ganzton
(A)-(c)	(4/5)w	310,265	-3mq+2ok	mitteltönige kleine Terz
(A)-(cis)	5/4	386,314	4mq-2ok	große Terz
(A)-(des*)	32/25	427,373	-8mq+5ok	verminderte Quarte
(A)-(d)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte
(A)-(dis*)	(5/8)w^2	579,471	6mq-3ok	mitteltönige übermäßige Quarte, mitteltön
(A)-(es)	(16/25)w^2	620,529	-6mq+4ok	mitteltönige verminderte Quinte
(A)-(e)	w	696,578	mq	mitteltönige Quinte

(A)-(f)	8/5	813,686	-4mq+3ok	kleine Sexte
(A)-(fis)	(1/2)w^3	889,735	3mq-ok	mitteltönige große Sexte
(A)-(ges*)	(64/125)w^3	930,794	-9mq+6ok	mitteltönig verminderte Septime
(A)-(g)	(4/5)w^2	1006,843	-2mq+2ok	mitteltönige kleine Septime
(A)-(gis)	(5/4)w	1082,892	5mq-2ok	mitteltönige große Septime
(A)-(as*)	(32/25)w	1123,951	-7mq+5ok	mitteltönig verminderte Oktave
(Ais*)-(B)	128/125	41,059	-12mq+7ok	(größere) verminderte Sekunde =kleine Die
(Ais*)-(H)	(8/25)w^3	117,108	-5mq+3ok	diatonischer mitteltöniger Halbton
(Ais*)-(c)	(64/125)w^2	234,216	-10mq+6ok	mitteltönig verminderte Terz
(Ais*)-(cis)	(4/5)w	310,265	-3mq+2ok	mitteltönige kleine Terz
(Ais*)-(des*)	(512/625)w	351,324	-15mq+9ok	mitteltönig doppelt verminderte Quarte
(Ais*)-(d)	32/25	427,373	-8mq+5ok	verminderte Quarte
(Ais*)-(dis*)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte
(Ais*)-(es)	(256/625)w^3	544,480	-13mq+8ok	mitteltönig doppelt verminderte Quinte
(Ais*)-(e)	(16/25)w^2	620,529	-6mq+4ok	mitteltönige verminderte Quinte
(Ais*)-(f)	(128/125)w	737,637	-11mq+7ok	mitteltönig verminderte Sexte
(Ais*)-(fis)	8/5	813,686	-4mq+3ok	kleine Sexte
(Ais*)-(ges*)	1024/625	854,745	-16mq+10ok	mitteltönige doppelt verminderte Septime
(Ais*)-(g)	(64/125)w^3	930,794	-9mq+6ok	mitteltönig verminderte Septime
(Ais*)-(gis)	(4/5)w^2	1006,843	-2mq+2ok	mitteltönige kleine Septime
(Ais*)-(as*)	(512/625)w^2	1047,902	-14mq+9ok	mitteltönig doppelt verminderte Oktave
(Ais*)-(a)	(32/25)w	1123,951	-7mq+5ok	mitteltönig verminderte Oktave
(B)-(H)	(5/16)w^3	76,049	7mq-4ok	chromatischer mitteltöniger Halbton
(B)-(c)	(1/2)w^2	193,157	2mq-ok	mitteltöniger Ganzton
(B)-(cis)	(25/32)w	269,206	9mq-5ok	mitteltönige übermäßige Sekunde
(B)-(des*)	(4/5)w	310,265	-3mq+2ok	mitteltönige kleine Terz
(B)-(d)	5/4	386,314	4mq-2ok	große Terz
(B)-(dis*)	(25/64)w^3	462,363	11mq-6ok	mitteltönig übermäßige Terz
(B)-(es)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte
(B)-(e)	(5/8)w^2	579,471	6mq-3ok	mitteltönige übermäßige Quarte, mitteltön
(B)-(f)	w	696,578	mq	mitteltönige Quinte
(B)-(fis)	25/16	772,627	8mq-4ok	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
(B)-(ges*)	8/5	813,686	-4mq+3ok	kleine Sexte
(B)-(g)	(1/2)w^3	889,735	3mq-ok	mitteltönige große Sexte
(B)-(gis)	(25/32)w^2	965,784	10mq-5ok	mitteltönige übermäßge Sexte
(B)-(as*)	(4/5)w^2	1006,843	-2mq+2ok	mitteltönige kleine Septime

(B)-(a)	(5/4)w	1082,892	5mq-2ok	mitteltönige große Septime
(B)-(ais*)	125/64	1158,941	12mq-6ok	übermäßige Septime
(H)-(c)	(8/25)w^3	117,108	-5mq+3ok	diatonischer mitteltöniger Halbton
(H)-(cis)	(1/2)w^2	193,157	2mq-ok	mitteltöniger Ganzton
(H)-(des*)	(64/125)w^2	234,216	-10mq+6ok	mitteltönig verminderte Terz
(H)-(d)	(4/5)w	310,265	-3mq+2ok	mitteltönige kleine Terz
(H)-(dis*)	5/4	386,314	4mq-2ok	große Terz
(H)-(es)	32/25	427,373	-8mq+5ok	verminderte Quarte
(H)-(e)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte
(H)-(f)	(16/25)w^2	620,529	-6mq+4ok	mitteltönige verminderte Quinte
(H)-(fis)	w	696,578	mq	mitteltönige Quinte
(H)-(ges*)	(128/125)w	737,637	-11mq+7ok	mitteltönig verminderte Sexte
(H)-(g)	8/5	813,686	-4mq+3ok	kleine Sexte
(H)-(gis)	(1/2)w^3	889,735	3mq-ok	mitteltönige große Sexte
(H)-(as*)	(64/125)w^3	930,794	-9mq+6ok	mitteltönig verminderte Septime
(H)-(a)	(4/5)w^2	1006,843	-2mq+2ok	mitteltönige kleine Septime
(H)-(ais*)	(5/4)w	1082,892	5mq-2ok	mitteltönige große Septime
(H)-(b)	(32/25)w	1123,951	-7mq+5ok	mitteltönig verminderte Oktave

Intervalle der reinen Stimmung

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über Intervalle, die bei der reinen Stimmung auftreten können. Berechnet wurde jedes der Intervall: C-Cis, C-Des, C-D, C-Dis, C-Es, C-E, ..., Cis-Dis, Cis-Es, Cis-E, Cis-F, Cis-Fis, ..., D-Dis, D-Es, D-E, ... Die Intervalle wurden dann Größe (in Cent) nach geordnet. Bei gleichen Intervallen wurde nur ein Repräsentant ausgewählt.

Intervallreferenz ist C-Dur und C-Moll mit den reinen Akkorden C-E-G, C-Es-G, F-A-c, F-As-c, G-H-D und G-B-d, ergänzt um weitere Zwischentöne mit den diatonischen Halbtonschritten (Frequenzverhältnis 16/15) C-Des, Cis-D, Dis-E, F-Ges, Fis-G, Gis-A und Ais-H.

Jedes Intervall ist eindeutig als Summe der drei Grundintervalle des Quint-Terz-Sytems darstellbar.

- ok=Oktave
- q=Quinte und
- t=große Terz.

Die jeweilige Berechnung erscheint in der 4. Spalte

Intervall	Frequenzverh.	in Cent	Berechnung	Intervallbezeichnung
C-Cis	135/128	92,179	t+3q-2ok	(größere) übermäßige Prim, großer chromat
C-Des	16/15	111,731	-t-q+ok	kleine Sekunde, diatonischer Halbton
C-D	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
C-Dis	75/64	274,582	2t+q-ok	übermäßige Sekunde
C-Es	6/5	315,641	-t+q	kleine Terz
C-E	5/4	386,314	t	große Terz
C-F	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
C-Fis	45/32	590,224	t+2q-ok	Tritonus, übermäßige Quarte
C-Ges	64/45	609,776	-t-2q+2ok	(kleinere) verminderte Quinte
C-G	3/2	701,955	q	Quinte
C-Gis	25/16	772,627	2t	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
C-As	8/5	813,686	-t+ok	kleine Sexte
C-A	5/3	884,359	t-q+ok	große Sexte
C-Ais	225/128	976,537	2t+2q-ok	(größere) übermäßige Sexte
C-B	9/5	1017,596	-t+2q	kleine Septime
C-H	15/8	1088,269	t+q	große Septime
Cis-Des	2048/2025	19,553	-2t-4q+3ok	(kleinere) verminderte Sekunde, Diaschism
Cis-D	16/15	111,731	-t-q+ok	kleine Sekunde, diatonischer Halbton
Cis-Dis	10/9	182,404	t-2q+ok	kleiner Ganzton
Cis-Es	256/225	223,463	-2t-2q+2ok	(kleinere) verminderte Terz
Cis-E	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein

Cis-F	512/405	405,866	-t-4q+3ok	(kleinere) verminderte Quarte
Cis-Fis	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
Cis-Ges	8192/6075	517,598	-2t-5q+4ok	doppelt verminderte Quinte
Cis-G	64/45	609,776	-t-2q+2ok	(kleinere) verminderte Quinte
Cis-Gis	40/27	680,449	t-3q+2ok	unreine Quinte (In C-Dur d-a des Akkords
Cis-As	1024/675	721,508	-2t-3q+3ok	(kleinere) verminderte Sexte
Cis-A	128/81	792,180	-4q+3ok	pythagoreische kleine Sexte
Cis-Ais	5/3	884,359	t-q+ok	große Sexte
Cis-B	128/75	925,418	-2t-q+2ok	(größere) verminderte Septime
Cis-H	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
Cis-c	256/135	1107,821	-t-3q+3ok	(kleinere) verminderte Oktave
Des-D	135/128	92,179	t+3q-2ok	(größere) übermäßige Prim, großer chromat
Des-Dis	1125/1024	162,851	3t+2q-2ok	doppelt übermäßige Prim
Des-Es	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
Des-E	75/64	274,582	2t+q-ok	übermäßige Sekunde
Des-F	5/4	386,314	t	große Terz
Des-Fis	675/512	478,492	2t+3q-2ok	(größere) übermäßige Terz
Des-Ges	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
Des-G	45/32	590,224	t+2q-ok	Tritonus, übermäßige Quarte
Des-Gis	375/256	660,896	3t+q-ok	doppelt übermäßige Quarte
Des-As	3/2	701,955	q	Quinte
Des-A	25/16	772,627	2t	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
Des-Ais	3375/2048	864,806	3t+3q-2ok	doppelt übermäßige Quinte
Des-B	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
Des-H	225/128	976,537	2t+2q-ok	(größere) übermäßige Sexte
Des-c	15/8	1088,269	t+q	große Septime
Des-cis	2025/1024	1180,447	2t+4q-2ok	(größere) überm. Septime
D-Dis	25/24	70,672	2t-q	(kleinere) übermäßige Prim, kleiner chrom
D-Es	16/15	111,731	-t-q+ok	kleine Sekunde, diatonischer Halbton
D-E	10/9	182,404	t-2q+ok	kleiner Ganzton
D-F	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
D-Fis	5/4	386,314	t	große Terz
D-Ges	512/405	405,866	-t-4q+3ok	(kleinere) verminderte Quarte
D-G	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
D-Gis	25/18	568,717	2t-2q+ok	(kleinere) übermäßige Quarte
D-As	64/45	609,776	-t-2q+2ok	(kleinere) verminderte Quinte

D-A	40/27	680,449	t-3q+2ok	unreine Quinte (In C-Dur d-a des Akkords
D-Ais	25/16	772,627	2t	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
D-B	8/5	813,686	-t+ok	kleine Sexte
D-H	5/3	884,359	t-q+ok	große Sexte
D-c	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
D-cis	15/8	1088,269	t+q	große Septime
D-des	256/135	1107,821	-t-3q+3ok	(kleinere) verminderte Oktave
Dis-Es	128/125	41,059	-3t+ok	(größere) verminderte Sekunde =kleine Die
Dis-E	16/15	111,731	-t-q+ok	kleine Sekunde, diatonischer Halbton
Dis-F	256/225	223,463	-2t-2q+2ok	(kleinere) verminderte Terz
Dis-Fis	6/5	315,641	-t+q	kleine Terz
Dis-Ges	4096/3375	335,194	-3t-3q+3ok	doppelt verminderte Quarte
Dis-G	32/25	427,373	-2t+ok	verminderte Quarte
Dis-Gis	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
Dis-As	512/375	539,104	-3t-q+2ok	doppelt verminderte Quinte
Dis-A	64/45	609,776	-t-2q+2ok	(kleinere) verminderte Quinte
Dis-Ais	3/2	701,955	q	Quinte
Dis-B	192/125	743,014	-3t+q+ok	(größere) verminderte Sexte
Dis-H	8/5	813,686	-t+ok	kleine Sexte
Dis-c	128/75	925,418	-2t-q+2ok	(größere) verminderte Septime
Dis-cis	9/5	1017,596	-t+2q	kleine Septime
Dis-des	2048/1125	1037,149	-3t-2q+3ok	doppelt verminderte Oktave
Dis-d	48/25	1129,328	-2t+q+ok	(größere) verminderte Oktave
Es-E	25/24	70,672	2t-q	(kleinere) übermäßige Prim, kleiner chrom
Es-F	10/9	182,404	t-2q+ok	kleiner Ganzton
Es-Fis	75/64	274,582	2t+q-ok	übermäßige Sekunde
Es-Ges	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
Es-G	5/4	386,314	t	große Terz
Es-Gis	125/96	456,986	3t-q	(kleinere) übermäßige Terz
Es-As	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
Es-A	25/18	568,717	2t-2q+ok	(kleinere) übermäßige Quarte
Es-Ais	375/256	660,896	3t+q-ok	doppelt übermäßige Quarte
Es-B	3/2	701,955	q	Quinte
Es-H	25/16	772,627	2t	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
Es-c	5/3	884,359	t-q+ok	große Sexte
Es-cis	225/128	976,537	2t+2q-ok	(größere) übermäßige Sexte

Es-des	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
Es-d	15/8	1088,269	t+q	große Septime
Es-dis	125/64	1158,941	3t	übermäßige Septime
E-F	16/15	111,731	-t-q+ok	kleine Sekunde, diatonischer Halbton
E-Fis	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
E-Ges	256/225	223,463	-2t-2q+2ok	(kleinere) verminderte Terz
E-G	6/5	315,641	-t+q	kleine Terz
E-Gis	5/4	386,314	t	große Terz
E-As	32/25	427,373	-2t+ok	verminderte Quarte
E-A	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
E-Ais	45/32	590,224	t+2q-ok	Tritonus, übermäßige Quarte
E-B	36/25	631,283	-2t+2q	(größere) verminderte Quinte
E-H	3/2	701,955	q	Quinte
E-c	8/5	813,686	-t+ok	kleine Sexte
E-cis	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
E-des	128/75	925,418	-2t-q+2ok	(größere) verminderte Septime
E-d	9/5	1017,596	-t+2q	kleine Septime
E-dis	15/8	1088,269	t+q	große Septime
E-es	48/25	1129,328	-2t+q+ok	(größere) verminderte Oktave
F-Fis	135/128	92,179	t+3q-2ok	(größere) übermäßige Prim, großer chromat
F-Ges	16/15	111,731	-t-q+ok	kleine Sekunde, diatonischer Halbton
F-G	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
F-Gis	75/64	274,582	2t+q-ok	übermäßige Sekunde
F-As	6/5	315,641	-t+q	kleine Terz
F-A	5/4	386,314	t	große Terz
F-Ais	675/512	478,492	2t+3q-2ok	(größere) übermäßige Terz
F-B	27/20	519,551	-t+3q-ok	unreine Quarte (In C-Dur II. Stufe a-d)
F-H	45/32	590,224	t+2q-ok	Tritonus, übermäßige Quarte
F-c	3/2	701,955	q	Quinte
F-cis	405/256	794,134	t+4q-2ok	(größere) übermäßige Quinte
F-des	8/5	813,686	-t+ok	kleine Sexte
F-d	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
F-dis	225/128	976,537	2t+2q-ok	(größere) übermäßige Sexte
F-es	9/5	1017,596	-t+2q	kleine Septime
F-e	15/8	1088,269	t+q	große Septime
Fis-Ges	2048/2025	19,553	-2t-4q+3ok	(kleinere) verminderte Sekunde, Diaschism

Fis-G	16/15	111,731	-t-q+ok	kleine Sekunde, diatonischer Halbton
Fis-Gis	10/9	182,404	t-2q+ok	kleiner Ganzton
Fis-As	256/225	223,463	-2t-2q+2ok	(kleinere) verminderte Terz
Fis-A	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
Fis-Ais	5/4	386,314	t	große Terz
Fis-B	32/25	427,373	-2t+ok	verminderte Quarte
Fis-H	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
Fis-c	64/45	609,776	-t-2q+2ok	(kleinere) verminderte Quinte
Fis-cis	3/2	701,955	q	Quinte
Fis-des	1024/675	721,508	-2t-3q+3ok	(kleinere) verminderte Sexte
Fis-d	8/5	813,686	-t+ok	kleine Sexte
Fis-dis	5/3	884,359	t-q+ok	große Sexte
Fis-es	128/75	925,418	-2t-q+2ok	(größere) verminderte Septime
Fis-e	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
Fis-f	256/135	1107,821	-t-3q+3ok	(kleinere) verminderte Oktave
Ges-G	135/128	92,179	t+3q-2ok	(größere) übermäßige Prim, großer chromat
Ges-Gis	1125/1024	162,851	3t+2q-2ok	doppelt übermäßige Prim
Ges-As	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
Ges-A	75/64	274,582	2t+q-ok	übermäßige Sekunde
Ges-Ais	10125/8192	366,761	3t+4q-3ok	übermäßige Septime
Ges-B	81/64	407,820	4q-2ok	pythagoreisch große Terz = Ditonos
Ges-H	675/512	478,492	2t+3q-2ok	(größere) übermäßige Terz
Ges-c	45/32	590,224	t+2q-ok	Tritonus, übermäßige Quarte
Ges-cis	6075/4096	682,402	2t+5q-3ok	doppelt verminderte Quarte
Ges-des	3/2	701,955	q	Quinte
Ges-d	405/256	794,134	t+4q-2ok	(größere) übermäßige Quinte
Ges-dis	3375/2048	864,806	3t+3q-2ok	doppelt übermäßige Quinte
Ges-es	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
Ges-e	225/128	976,537	2t+2q-ok	(größere) übermäßige Sexte
Ges-f	15/8	1088,269	t+q	große Septime
Ges-fis	2025/1024	1180,447	2t+4q-2ok	(größere) überm. Septime
G-Gis	25/24	70,672	2t-q	(kleinere) übermäßige Prim, kleiner chrom
G-As	16/15	111,731	-t-q+ok	kleine Sekunde, diatonischer Halbton
G-A	10/9	182,404	t-2q+ok	kleiner Ganzton
G-Ais	75/64	274,582	2t+q-ok	übermäßige Sekunde
G-B	6/5	315,641	-t+q	kleine Terz

G-H	5/4	386,314	t	große Terz
G-c	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
G-cis	45/32	590,224	t+2q-ok	Tritonus, übermäßige Quarte
G-des	64/45	609,776	-t-2q+2ok	(kleinere) verminderte Quinte
G-d	3/2	701,955	q	Quinte
G-dis	25/16	772,627	2t	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
G-es	8/5	813,686	-t+ok	kleine Sexte
G-e	5/3	884,359	t-q+ok	große Sexte
G-f	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
G-fis	15/8	1088,269	t+q	große Septime
G-ges	256/135	1107,821	-t-3q+3ok	(kleinere) verminderte Oktave
Gis-As	128/125	41,059	-3t+ok	(größere) verminderte Sekunde =kleine Die
Gis-A	16/15	111,731	-t-q+ok	kleine Sekunde, diatonischer Halbton
Gis-Ais	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
Gis-B	144/125	244,969	-3t+2q	(größere) verminderte Terz
Gis-H	6/5	315,641	-t+q	kleine Terz
Gis-c	32/25	427,373	-2t+ok	verminderte Quarte
Gis-cis	27/20	519,551	-t+3q-ok	unreine Quarte (In C-Dur II. Stufe a-d)
Gis-des	512/375	539,104	-3t-q+2ok	doppelt verminderte Quinte
Gis-d	36/25	631,283	-2t+2q	(größere) verminderte Quinte
Gis-dis	3/2	701,955	q	Quinte
Gis-es	192/125	743,014	-3t+q+ok	(größere) verminderte Sexte
Gis-e	8/5	813,686	-t+ok	kleine Sexte
Gis-f	128/75	925,418	-2t-q+2ok	(größere) verminderte Septime
Gis-fis	9/5	1017,596	-t+2q	kleine Septime
Gis-ges	2048/1125	1037,149	-3t-2q+3ok	doppelt verminderte Oktave
Gis-g	48/25	1129,328	-2t+q+ok	(größere) verminderte Oktave
As-A	25/24	70,672	2t-q	(kleinere) übermäßige Prim, kleiner chrom
As-Ais	1125/1024	162,851	3t+2q-2ok	doppelt übermäßige Prim
As-B	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
As-H	75/64	274,582	2t+q-ok	übermäßige Sekunde
As-c	5/4	386,314	t	große Terz
As-cis	675/512	478,492	2t+3q-2ok	(größere) übermäßige Terz
As-des	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
As-d	45/32	590,224	t+2q-ok	Tritonus, übermäßige Quarte
As-dis	375/256	660,896	3t+q-ok	doppelt übermäßige Quarte

As-es	3/2	701,955	q	Quinte
As-e	25/16	772,627	2t	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
As-f	5/3	884,359	t-q+ok	große Sexte
As-fis	225/128	976,537	2t+2q-ok	(größere) übermäßige Sexte
As-ges	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
As-g	15/8	1088,269	t+q	große Septime
As-gis	125/64	1158,941	3t	übermäßige Septime
A-Ais	135/128	92,179	t+3q-2ok	(größere) übermäßige Prim, großer chromat
A-B	27/25	133,238	-2t+3q-ok	(größere) kleine Sekunde, großes Leimma,
A-H	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
A-c	6/5	315,641	-t+q	kleine Terz
A-cis	81/64	407,820	4q-2ok	pythagoreisch große Terz = Ditonos
A-des	32/25	427,373	-2t+ok	verminderte Quarte
A-d	27/20	519,551	-t+3q-ok	unreine Quarte (In C-Dur II. Stufe a-d)
A-dis	45/32	590,224	t+2q-ok	Tritonus, übermäßige Quarte
A-es	36/25	631,283	-2t+2q	(größere) verminderte Quinte
A-e	3/2	701,955	q	Quinte
A-f	8/5	813,686	-t+ok	kleine Sexte
A-fis	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
A-ges	128/75	925,418	-2t-q+2ok	(größere) verminderte Septime
A-g	9/5	1017,596	-t+2q	kleine Septime
A-gis	15/8	1088,269	t+q	große Septime
A-as	48/25	1129,328	-2t+q+ok	(größere) verminderte Oktave
Ais-B	128/125	41,059	-3t+ok	(größere) verminderte Sekunde =kleine Die
Ais-H	16/15	111,731	-t-q+ok	kleine Sekunde, diatonischer Halbton
Ais-c	256/225	223,463	-2t-2q+2ok	(kleinere) verminderte Terz
Ais-cis	6/5	315,641	-t+q	kleine Terz
Ais-des	4096/3375	335,194	-3t-3q+3ok	doppelt verminderte Quarte
Ais-d	32/25	427,373	-2t+ok	verminderte Quarte
Ais-dis	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
Ais-es	512/375	539,104	-3t-q+2ok	doppelt verminderte Quinte
Ais-e	64/45	609,776	-t-2q+2ok	(kleinere) verminderte Quinte
Ais-f	1024/675	721,508	-2t-3q+3ok	(kleinere) verminderte Sexte
Ais-fis	8/5	813,686	-t+ok	kleine Sexte
Ais-ges	16384/10125	833,239	-3t-4q+4ok	doppelt verminderte Septime
Ais-g	128/75	925,418	-2t-q+2ok	(größere) verminderte Septime

Ais-gis	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
Ais-as	2048/1125	1037,149	-3t-2q+3ok	doppelt verminderte Oktave
Ais-a	256/135	1107,821	-t-3q+3ok	(kleinere) verminderte Oktave
B-H	25/24	70,672	2t-q	(kleinere) übermäßige Prim, kleiner chrom
B-c	10/9	182,404	t-2q+ok	kleiner Ganzton
B-cis	75/64	274,582	2t+q-ok	übermäßige Sekunde
B-des	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
B-d	5/4	386,314	t	große Terz
B-dis	125/96	456,986	3t-q	(kleinere) übermäßige Terz
B-es	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
B-e	25/18	568,717	2t-2q+ok	(kleinere) übermäßige Quarte
B-f	40/27	680,449	t-3q+2ok	unreine Quinte (In C-Dur d-a des Akkords
B-fis	25/16	772,627	2t	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
B-ges	128/81	792,180	-4q+3ok	pythagoreische kleine Sexte
B-g	5/3	884,359	t-q+ok	große Sexte
B-gis	125/72	955,031	3t-2q+ok	(kleinere) übermäßige Sexte
B-as	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
B-a	50/27	1066,762	2t-3q+2ok	(kleinere) große Septime
B-ais	125/64	1158,941	3t	übermäßige Septime
H-c	16/15	111,731	-t-q+ok	kleine Sekunde, diatonischer Halbton
H-cis	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
H-des	256/225	223,463	-2t-2q+2ok	(kleinere) verminderte Terz
H-d	6/5	315,641	-t+q	kleine Terz
H-dis	5/4	386,314	t	große Terz
H-es	32/25	427,373	-2t+ok	verminderte Quarte
H-e	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
H-f	64/45	609,776	-t-2q+2ok	(kleinere) verminderte Quinte
H-fis	3/2	701,955	q	Quinte
H-ges	1024/675	721,508	-2t-3q+3ok	(kleinere) verminderte Sexte
H-g	8/5	813,686	-t+ok	kleine Sexte
H-gis	5/3	884,359	t-q+ok	große Sexte
H-as	128/75	925,418	-2t-q+2ok	(größere) verminderte Septime
H-a	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
H-ais	15/8	1088,269	t+q	große Septime
H-b	48/25	1129,328	-2t+q+ok	(größere) verminderte Oktave

Intervalle der gleichstufigen Stimmung

Größe des Intervalls in Cent	Intervall
0	Prim
100	gleichstufiger Halbton
200	gleichstufiger Ganzton
300	gleichstufige kleine Terz
400	gleichstufige große Terz
500	gleichstufige Quarte
600	gleichstufiger Tritonus
700	gleichstufige Quinte
800	gleichstufige kleine Sexte
900	gleichstufige große Sexte
1000	gleichstufige kleine Septime
1100	gleichstufige große Septime
1200	Oktave

Intervalle der pythagoreischen, mitteltönigen Stimmung, reinen und gleichstufigen Stimmung

---

Alle diese Intervalle, systematisch aufgezählt.

Bezeichnungen der reinen, pythagoreischen und mitteltönigen Tonleitern:
Reine Stimmung C-Dur (die 12-stufige Skala für c-Dur und c-moll mit des und fis)
c-des-d-es-e-f-fis-g-as-a-b-h-c' reine Tonleiter
| | | | | |
(cis dis ges gis ais auf einer 12-stufigen Skala nicht vorhanden. Hier so gewählt
cis-d, dis-e, f-ges, gis-a und ais-h diatonische Halbtöne (Frequenzverh. 16/15) sind.)
(c)-(d)-(e)-... mittetönige Tonleiter,
(x*) nur theoretisch, nicht vorhanden auf einer 12-stufigen Tastatur
[c]-[d]-[e]-... pyth. Tonleiter,
[x*] nur theoretisch, nicht vorhanden auf einer 12-stufigen Tastatur
Bezeichnung beim Frequenzverhältnis: w = Frequenzverhältnis der mitteltönigen Quinte
W = 5^(1/4)
Bezeichnungen bei der (additiven) Berechnung: ok=Oktave (2/1)
q=Quinte (3/2)
t=Terz (5/4)
mq=mitteltönige Quinte (w=5^(1/4))

Intervall	Frequenzverh.	in Cent	Berechnung	Intervallbezeichnung
[Cis]-[Des*]	524288/531441	-23,460	-12q+7ok	pythagoreische verminderte Sekunde = - py
[Dis*]-[Es]	524288/531441	-23,460	-12q+7ok	pythagoreische verminderte Sekunde = - py
[Fis]-[Ges*]	524288/531441	-23,460	-12q+7ok	pythagoreische verminderte Sekunde = - py
[Gis]-[As*]	524288/531441	-23,460	-12q+7ok	pythagoreische verminderte Sekunde = - py
[Ais*]-[B]	524288/531441	-23,460	-12q+7ok	pythagoreische verminderte Sekunde = - py
	32805/32768	1,954	8q+t-5ok	Schisma (Differenz syntonisches und pytha
Cis-Des	2048/2025	19,553	-2t-4q+3ok	(kleinere) verminderte Sekunde, Diaschism
Fis-Ges	2048/2025	19,553	-2t-4q+3ok	(kleinere) verminderte Sekunde, Diaschism
	81/80	21,506	4q-t-2ok	syntonisches Komma
(Cis)-(Des*)	128/125	41,059	-12mq+7ok	(größere) verminderte Sekunde = kleine Di
Dis-Es	128/125	41,059	-3t+ok	(größere) verminderte Sekunde = kleine Di
(Dis*)-(Es)	128/125	41,059	-12mq+7ok	(größere) verminderte Sekunde = kleine Di
(Fis)-(Ges*)	128/125	41,059	-12mq+7ok	(größere) verminderte Sekunde = kleine Di
Gis-As	128/125	41,059	-3t+ok	(größere) verminderte Sekunde = kleine Di
(Gis)-(As*)	128/125	41,059	-12mq+7ok	(größere) verminderte Sekunde = kleine Di
(Ais*)-(B)	128/125	41,059	-12mq+7ok	(größere) verminderte Sekunde = kleine Di
Ais-B	128/125	41,059	-3t+ok	(größere) verminderte Sekunde = kleine Di
	648/625	62,565	4q-4t-ok	große Diesis
D-Dis	25/24	70,672	2t-q	(kleinere) übermäßige Prim, kleiner chrom
Es-E	25/24	70,672	2t-q	(kleinere) übermäßige Prim, kleiner chrom
G-Gis	25/24	70,672	2t-q	(kleinere) übermäßige Prim, kleiner chrom
As-A	25/24	70,672	2t-q	(kleinere) übermäßige Prim, kleiner chrom
B-H	25/24	70,672	2t-q	(kleinere) übermäßige Prim, kleiner chrom
(C)-(Cis)	(5/16)w^3	76,049	7mq-4ok	chromatischer mitteltöniger Halbton
(Des*)-(D)	(5/16)w^3	76,049	7mq-4ok	chromatischer mitteltöniger Halbton
(D)-(Dis*)	(5/16)w^3	76,049	7mq-4ok	chromatischer mitteltöniger Halbton
(Es)-(E)	(5/16)w^3	76,049	7mq-4ok	chromatischer mitteltöniger Halbton
(F)-(Fis)	(5/16)w^3	76,049	7mq-4ok	chromatischer mitteltöniger Halbton
(Ges*)-(G)	(5/16)w^3	76,049	7mq-4ok	chromatischer mitteltöniger Halbton
(G)-(Gis)	(5/16)w^3	76,049	7mq-4ok	chromatischer mitteltöniger Halbton
(As*)-(A)	(5/16)w^3	76,049	7mq-4ok	chromatischer mitteltöniger Halbton
(A)-(Ais*)	(5/16)w^3	76,049	7mq-4ok	chromatischer mitteltöniger Halbton
(B)-(H)	(5/16)w^3	76,049	7mq-4ok	chromatischer mitteltöniger Halbton
[C]-[Des*]	256/243	90,225	-5q+3ok	pythagoreisches Leimma=pythagoreische kle
[Cis]-[D]	256/243	90,225	-5q+3ok	pythagoreisches Leimma=pythagoreische kle
[D]-[Es]	256/243	90,225	-5q+3ok	pythagoreisches Leimma=pythagoreische kle
[Dis*]-[E]	256/243	90,225	-5q+3ok	pythagoreisches Leimma=pythagoreische kle
[E]-[F]	256/243	90,225	-5q+3ok	pythagoreisches Leimma=pythagoreische kle
[F]-[Ges*]	256/243	90,225	-5q+3ok	pythagoreisches Leimma=pythagoreische kle
[Fis]-[G]	256/243	90,225	-5q+3ok	pythagoreisches Leimma=pythagoreische kle
[G]-[As*]	256/243	90,225	-5q+3ok	pythagoreisches Leimma=pythagoreische kle
[Gis]-[A]	256/243	90,225	-5q+3ok	pythagoreisches Leimma=pythagoreische kle
[A]-[B]	256/243	90,225	-5q+3ok	pythagoreisches Leimma=pythagoreische kle
[Ais*]-[H]	256/243	90,225	-5q+3ok	pythagoreisches Leimma=pythagoreische kle

[H]-[c]	256/243	90,225	-5q+3ok	pythagoreisches Leimma=pythagoreische kle
C-Cis	135/128	92,179	t+3q-2ok	(größere) übermäßige Prim, großer chromat
Des-D	135/128	92,179	t+3q-2ok	(größere) übermäßige Prim, großer chromat
F-Fis	135/128	92,179	t+3q-2ok	(größere) übermäßige Prim, großer chromat
Ges-G	135/128	92,179	t+3q-2ok	(größere) übermäßige Prim, großer chromat
A-Ais	135/128	92,179	t+3q-2ok	(größere) übermäßige Prim, großer chromat
		100,000		gleichstufiger Halbton
C-Des	16/15	111,731	-t-q+ok	kleine Sekunde, diatonischer Halbton
Cis-D	16/15	111,731	-t-q+ok	kleine Sekunde, diatonischer Halbton
D-Es	16/15	111,731	-t-q+ok	kleine Sekunde, diatonischer Halbton
Dis-E	16/15	111,731	-t-q+ok	kleine Sekunde, diatonischer Halbton
E-F	16/15	111,731	-t-q+ok	kleine Sekunde, diatonischer Halbton
F-Ges	16/15	111,731	-t-q+ok	kleine Sekunde, diatonischer Halbton
Fis-G	16/15	111,731	-t-q+ok	kleine Sekunde, diatonischer Halbton
G-As	16/15	111,731	-t-q+ok	kleine Sekunde, diatonischer Halbton
Gis-A	16/15	111,731	-t-q+ok	kleine Sekunde, diatonischer Halbton
Ais-H	16/15	111,731	-t-q+ok	kleine Sekunde, diatonischer Halbton
H-c	16/15	111,731	-t-q+ok	kleine Sekunde, diatonischer Halbton
[C]-[Cis]	2187/2048	113,685	7q-4ok	pythagoreische Apotome = pythagoreische ü
[Des*]-[D]	2187/2048	113,685	7q-4ok	pythagoreische Apotome = pythagoreische ü
[D]-[Dis*]	2187/2048	113,685	7q-4ok	pythagoreische Apotome = pythagoreische ü
[Es]-[E]	2187/2048	113,685	7q-4ok	pythagoreische Apotome = pythagoreische ü
[F]-[Fis]	2187/2048	113,685	7q-4ok	pythagoreische Apotome = pythagoreische ü
[Ges*]-[G]	2187/2048	113,685	7q-4ok	pythagoreische Apotome = pythagoreische ü
[G]-[Gis]	2187/2048	113,685	7q-4ok	pythagoreische Apotome = pythagoreische ü
[As*]-[A]	2187/2048	113,685	7q-4ok	pythagoreische Apotome = pythagoreische ü
[A]-[Ais*]	2187/2048	113,685	7q-4ok	pythagoreische Apotome = pythagoreische ü
[B]-[H]	2187/2048	113,685	7q-4ok	pythagoreische Apotome = pythagoreische ü
(C)-(Des*)	(8/25)w^3	117,108	-5mq+3ok	diatonischer mitteltöniger Halbton
(Cis)-(D)	(8/25)w^3	117,108	-5mq+3ok	diatonischer mitteltöniger Halbton
(D)-(Es)	(8/25)w^3	117,108	-5mq+3ok	diatonischer mitteltöniger Halbton
(Dis*)-(E)	(8/25)w^3	117,108	-5mq+3ok	diatonischer mitteltöniger Halbton
(E)-(F)	(8/25)w^3	117,108	-5mq+3ok	diatonischer mitteltöniger Halbton
(F)-(Ges*)	(8/25)w^3	117,108	-5mq+3ok	diatonischer mitteltöniger Halbton
(Fis)-(G)	(8/25)w^3	117,108	-5mq+3ok	diatonischer mitteltöniger Halbton
(G)-(As*)	(8/25)w^3	117,108	-5mq+3ok	diatonischer mitteltöniger Halbton
(Gis)-(A)	(8/25)w^3	117,108	-5mq+3ok	diatonischer mitteltöniger Halbton
(A)-(B)	(8/25)w^3	117,108	-5mq+3ok	diatonischer mitteltöniger Halbton
(Ais*)-(H)	(8/25)w^3	117,108	-5mq+3ok	diatonischer mitteltöniger Halbton
(H)-(c)	(8/25)w^3	117,108	-5mq+3ok	diatonischer mitteltöniger Halbton
A-B	27/25	133,238	-2t+3q-ok	(größere) kleine Sekunde, großes Leimma,
(Des*)-(Dis*)	(125/256)w^2	152,098	14mq-8ok	mitteltönige doppelt übermäßige Prim
(Ges*)-(Gis)	(125/256)w^2	152,098	14mq-8ok	mitteltönige doppelt übermäßige Prim
(As*)-(Ais*)	(125/256)w^2	152,098	14mq-8ok	mitteltönige doppelt übermäßige Prim
Des-Dis	1125/1024	162,851	3t+2q-2ok	doppelt übermäßige Prim
Ges-Gis	1125/1024	162,851	3t+2q-2ok	doppelt übermäßige Prim
As-Ais	1125/1024	162,851	3t+2q-2ok	doppelt übermäßige Prim
[Cis]-[Es]	65536/59049	180,450	-10q+6ok	pythagoreische verminderte Terz
[Dis*]-[F]	65536/59049	180,450	-10q+6ok	pythagoreische verminderte Terz
[E]-[Ges*]	65536/59049	180,450	-10q+6ok	pythagoreische verminderte Terz
[Fis]-[As*]	65536/59049	180,450	-10q+6ok	pythagoreische verminderte Terz
[Gis]-[B]	65536/59049	180,450	-10q+6ok	pythagoreische verminderte Terz
[Ais*]-[c]	65536/59049	180,450	-10q+6ok	pythagoreische verminderte Terz
[H]-[des*]	65536/59049	180,450	-10q+6ok	pythagoreische verminderte Terz
Cis-Dis	10/9	182,404	t-2q+ok	kleiner Ganzton
D-E	10/9	182,404	t-2q+ok	kleiner Ganzton
Es-F	10/9	182,404	t-2q+ok	kleiner Ganzton
Fis-Gis	10/9	182,404	t-2q+ok	kleiner Ganzton
G-A	10/9	182,404	t-2q+ok	kleiner Ganzton
B-c	10/9	182,404	t-2q+ok	kleiner Ganzton
(C)-(D)	(1/2)w^2	193,157	2mq-ok	mitteltöniger Ganzton
(Cis)-(Dis*)	(1/2)w^2	193,157	2mq-ok	mitteltöniger Ganzton
(Des*)-(Es)	(1/2)w^2	193,157	2mq-ok	mitteltöniger Ganzton
(D)-(E)	(1/2)w^2	193,157	2mq-ok	mitteltöniger Ganzton
(Es)-(F)	(1/2)w^2	193,157	2mq-ok	mitteltöniger Ganzton
(E)-(Fis)	(1/2)w^2	193,157	2mq-ok	mitteltöniger Ganzton
(F)-(G)	(1/2)w^2	193,157	2mq-ok	mitteltöniger Ganzton
(Fis)-(Gis)	(1/2)w^2	193,157	2mq-ok	mitteltöniger Ganzton
(Ges*)-(As*)	(1/2)w^2	193,157	2mq-ok	mitteltöniger Ganzton
(G)-(A)	(1/2)w^2	193,157	2mq-ok	mitteltöniger Ganzton
(Gis)-(Ais*)	(1/2)w^2	193,157	2mq-ok	mitteltöniger Ganzton
(As*)-(B)	(1/2)w^2	193,157	2mq-ok	mitteltöniger Ganzton
(A)-(H)	(1/2)w^2	193,157	2mq-ok	mitteltöniger Ganzton
(B)-(c)	(1/2)w^2	193,157	2mq-ok	mitteltöniger Ganzton
(H)-(cis)	(1/2)w^2	193,157	2mq-ok	mitteltöniger Ganzton
		200,000		gleichstufiger Ganzton
C-D	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton

[C]-[D]	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
[Cis]-[Dis*]	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
Des-Es	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
[Des*]-[Es]	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
[D]-[E]	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
[Es]-[F]	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
E-Fis	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
[E]-[Fis]	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
[F]-[G]	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
F-G	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
[Fis]-[Gis]	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
Ges-As	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
[Ges*]-[As*]	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
[G]-[A]	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
Gis-Ais	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
[Gis]-[Ais*]	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
[As*]-[B]	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
As-B	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
[A]-[H]	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
A-H	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
[B]-[c]	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
H-cis	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
[H]-[cis]	9/8	203,910	2q-ok	großer Ganzton
Cis-Es	256/225	223,463	-2t-2q+2ok	(kleinere) verminderte Terz
Dis-F	256/225	223,463	-2t-2q+2ok	(kleinere) verminderte Terz
E-Ges	256/225	223,463	-2t-2q+2ok	(kleinere) verminderte Terz
Fis-As	256/225	223,463	-2t-2q+2ok	(kleinere) verminderte Terz
Ais-c	256/225	223,463	-2t-2q+2ok	(kleinere) verminderte Terz
H-des	256/225	223,463	-2t-2q+2ok	(kleinere) verminderte Terz
[Des*]-[Dis*]	1570121/1376878	227,370	14q-8ok	pythagoreische doppelt übermäßige Prim <>
[Ges*]-[Gis]	1570121/1376878	227,370	14q-8ok	pythagoreische doppelt übermäßige Prim <>
[As*]-[Ais*]	1570121/1376878	227,370	14q-8ok	pythagoreische doppelt übermäßige Prim <>
(Cis)-(Es)	(64/125)w^2	234,216	-10mq+6ok	mitteltönig verminderte Terz
(Dis*)-(F)	(64/125)w^2	234,216	-10mq+6ok	mitteltönig verminderte Terz
(E)-(Ges*)	(64/125)w^2	234,216	-10mq+6ok	mitteltönig verminderte Terz
(Fis)-(As*)	(64/125)w^2	234,216	-10mq+6ok	mitteltönig verminderte Terz
(Gis)-(B)	(64/125)w^2	234,216	-10mq+6ok	mitteltönig verminderte Terz
(Ais*)-(c)	(64/125)w^2	234,216	-10mq+6ok	mitteltönig verminderte Terz
(H)-(des*)	(64/125)w^2	234,216	-10mq+6ok	mitteltönig verminderte Terz
Gis-B	144/125	244,969	-3t+2q	(größere) verminderte Terz
(C)-(Dis*)	(25/32)w	269,206	9mq-5ok	mitteltönige übermäßige Sekunde
(Des*)-(E)	(25/32)w	269,206	9mq-5ok	mitteltönige übermäßige Sekunde
(Es)-(Fis)	(25/32)w	269,206	9mq-5ok	mitteltönige übermäßige Sekunde
(F)-(Gis)	(25/32)w	269,206	9mq-5ok	mitteltönige übermäßige Sekunde
(Ges*)-(A)	(25/32)w	269,206	9mq-5ok	mitteltönige übermäßige Sekunde
(G)-(Ais*)	(25/32)w	269,206	9mq-5ok	mitteltönige übermäßige Sekunde
(As*)-(H)	(25/32)w	269,206	9mq-5ok	mitteltönige übermäßige Sekunde
(B)-(cis)	(25/32)w	269,206	9mq-5ok	mitteltönige übermäßige Sekunde
[Dis*]-[Ges*]	469571/401606	270,675	-15q+9ok	pythagoreische doppelt verminderte Quarte
[Ais*]-[des*]	469571/401606	270,675	-15q+9ok	pythagoreische doppelt verminderte Quarte
C-Dis	75/64	274,582	2t+q-ok	übermäßige Sekunde
Des-E	75/64	274,582	2t+q-ok	übermäßige Sekunde
Es-Fis	75/64	274,582	2t+q-ok	übermäßige Sekunde
F-Gis	75/64	274,582	2t+q-ok	übermäßige Sekunde
Ges-A	75/64	274,582	2t+q-ok	übermäßige Sekunde
G-Ais	75/64	274,582	2t+q-ok	übermäßige Sekunde
As-H	75/64	274,582	2t+q-ok	übermäßige Sekunde
B-cis	75/64	274,582	2t+q-ok	übermäßige Sekunde
[C]-[Es]	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
Cis-E	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
[Cis]-[E]	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
[D]-[F]	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
D-F	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
[Dis*]-[Fis]	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
[Es]-[Ges*]	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
Es-Ges	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
[E]-[G]	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
[F]-[As*]	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
[Fis]-[A]	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
Fis-A	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
[G]-[B]	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
[Gis]-[H]	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
[A]-[c]	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
[Ais*]-[cis]	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
B-des	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
[B]-[des*]	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein
[H]-[d]	32/27	294,135	-3q+2ok	pythagoreische kleine Terz (unreine klein

		300,000		gleichstufige kleine Terz
(C)-(Es)	(4/5)w	310,265	-3mq+2ok	mitteltönige kleine Terz
(Cis)-(E)	(4/5)w	310,265	-3mq+2ok	mitteltönige kleine Terz
(D)-(F)	(4/5)w	310,265	-3mq+2ok	mitteltönige kleine Terz
(Dis*)-(Fis)	(4/5)w	310,265	-3mq+2ok	mitteltönige kleine Terz
(Es)-(Ges*)	(4/5)w	310,265	-3mq+2ok	mitteltönige kleine Terz
(E)-(G)	(4/5)w	310,265	-3mq+2ok	mitteltönige kleine Terz
(F)-(As*)	(4/5)w	310,265	-3mq+2ok	mitteltönige kleine Terz
(Fis)-(A)	(4/5)w	310,265	-3mq+2ok	mitteltönige kleine Terz
(G)-(B)	(4/5)w	310,265	-3mq+2ok	mitteltönige kleine Terz
(Gis)-(H)	(4/5)w	310,265	-3mq+2ok	mitteltönige kleine Terz
(A)-(c)	(4/5)w	310,265	-3mq+2ok	mitteltönige kleine Terz
(Ais*)-(cis)	(4/5)w	310,265	-3mq+2ok	mitteltönige kleine Terz
(B)-(des*)	(4/5)w	310,265	-3mq+2ok	mitteltönige kleine Terz
(H)-(d)	(4/5)w	310,265	-3mq+2ok	mitteltönige kleine Terz
C-Es	6/5	315,641	-t+q	kleine Terz
Dis-Fis	6/5	315,641	-t+q	kleine Terz
E-G	6/5	315,641	-t+q	kleine Terz
F-As	6/5	315,641	-t+q	kleine Terz
G-B	6/5	315,641	-t+q	kleine Terz
Gis-H	6/5	315,641	-t+q	kleine Terz
A-c	6/5	315,641	-t+q	kleine Terz
Ais-cis	6/5	315,641	-t+q	kleine Terz
H-d	6/5	315,641	-t+q	kleine Terz
[C]-[Dis*]	19683/16384	317,595	9q-5ok	pythagoreische übermäßige Sekunde
[Des*]-[E]	19683/16384	317,595	9q-5ok	pythagoreische übermäßige Sekunde
[Es]-[Fis]	19683/16384	317,595	9q-5ok	pythagoreische übermäßige Sekunde
[F]-[Gis]	19683/16384	317,595	9q-5ok	pythagoreische übermäßige Sekunde
[Ges*]-[A]	19683/16384	317,595	9q-5ok	pythagoreische übermäßige Sekunde
[G]-[Ais*]	19683/16384	317,595	9q-5ok	pythagoreische übermäßige Sekunde
[As*]-[H]	19683/16384	317,595	9q-5ok	pythagoreische übermäßige Sekunde
[B]-[cis]	19683/16384	317,595	9q-5ok	pythagoreische übermäßige Sekunde
Dis-Ges	4096/3375	335,194	-3t-3q+3ok	doppelt verminderte Quarte
Ais-des	4096/3375	335,194	-3t-3q+3ok	doppelt verminderte Quarte
(Ges*)-(Ais*)	625/512	345,255	16mq-9ok	mitteltönig doppelt übermäßige Sekunde
(Dis*)-(Ges*)	(512/625)w	351,324	-15mq+9ok	mitteltönig doppelt verminderte Quarte
(Ais*)-(des*)	(512/625)w	351,324	-15mq+9ok	mitteltönig doppelt verminderte Quarte
Ges-Ais	10125/8192	366,761	3t+4q-3ok	übermäßige Septime
[Cis]-[F]	8192/6561	384,360	-8q+5ok	pythagoreische verminderte Quarte <>
[D]-[Ges*]	8192/6561	384,360	-8q+5ok	pythagoreische verminderte Quarte <>
[Dis*]-[G]	8192/6561	384,360	-8q+5ok	pythagoreische verminderte Quarte <>
[E]-[As*]	8192/6561	384,360	-8q+5ok	pythagoreische verminderte Quarte <>
[Fis]-[B]	8192/6561	384,360	-8q+5ok	pythagoreische verminderte Quarte <>
[Gis]-[c]	8192/6561	384,360	-8q+5ok	pythagoreische verminderte Quarte <>
[A]-[des*]	8192/6561	384,360	-8q+5ok	pythagoreische verminderte Quarte <>
[Ais*]-[d]	8192/6561	384,360	-8q+5ok	pythagoreische verminderte Quarte <>
[H]-[es]	8192/6561	384,360	-8q+5ok	pythagoreische verminderte Quarte <>
C-E	5/4	386,314	t	große Terz
(C)-(E)	5/4	386,314	4mq-2ok	große Terz
(Des*)-(F)	5/4	386,314	4mq-2ok	große Terz
Des-F	5/4	386,314	t	große Terz
(D)-(Fis)	5/4	386,314	4mq-2ok	große Terz
D-Fis	5/4	386,314	t	große Terz
Es-G	5/4	386,314	t	große Terz
(Es)-(G)	5/4	386,314	4mq-2ok	große Terz
(E)-(Gis)	5/4	386,314	4mq-2ok	große Terz
E-Gis	5/4	386,314	t	große Terz
(F)-(A)	5/4	386,314	4mq-2ok	große Terz
F-A	5/4	386,314	t	große Terz
Fis-Ais	5/4	386,314	t	große Terz
(Fis)-(Ais*)	5/4	386,314	4mq-2ok	große Terz
(Ges*)-(B)	5/4	386,314	4mq-2ok	große Terz
(G)-(H)	5/4	386,314	4mq-2ok	große Terz
G-H	5/4	386,314	t	große Terz
(As*)-(c)	5/4	386,314	4mq-2ok	große Terz
As-c	5/4	386,314	t	große Terz
(A)-(cis)	5/4	386,314	4mq-2ok	große Terz
(B)-(d)	5/4	386,314	4mq-2ok	große Terz
B-d	5/4	386,314	t	große Terz
H-dis	5/4	386,314	t	große Terz
(H)-(dis*)	5/4	386,314	4mq-2ok	große Terz
		400,000		gleichstufige große Terz
Cis-F	512/405	405,866	-t-4q+3ok	(kleinere) verminderte Quarte
D-Ges	512/405	405,866	-t-4q+3ok	(kleinere) verminderte Quarte
[C]-[E]	81/64	407,820	4q-2ok	pythagoreisch große Terz = Ditonos
[Des*]-[F]	81/64	407,820	4q-2ok	pythagoreisch große Terz = Ditonos
[D]-[Fis]	81/64	407,820	4q-2ok	pythagoreisch große Terz = Ditonos

[Es]-[G]	81/64	407,820	4q-2ok	pythagoreisch große Terz = Ditonos
[E]-[Gis]	81/64	407,820	4q-2ok	pythagoreisch große Terz = Ditonos
[F]-[A]	81/64	407,820	4q-2ok	pythagoreisch große Terz = Ditonos
[Fis]-[Ais*]	81/64	407,820	4q-2ok	pythagoreisch große Terz = Ditonos
Ges-B	81/64	407,820	4q-2ok	pythagoreisch große Terz = Ditonos
[Ges*]-[B]	81/64	407,820	4q-2ok	pythagoreisch große Terz = Ditonos
[G]-[H]	81/64	407,820	4q-2ok	pythagoreisch große Terz = Ditonos
[As*]-[c]	81/64	407,820	4q-2ok	pythagoreisch große Terz = Ditonos
[A]-[cis]	81/64	407,820	4q-2ok	pythagoreisch große Terz = Ditonos
A-cis	81/64	407,820	4q-2ok	pythagoreisch große Terz = Ditonos
[B]-[d]	81/64	407,820	4q-2ok	pythagoreisch große Terz = Ditonos
[H]-[dis*]	81/64	407,820	4q-2ok	pythagoreisch große Terz = Ditonos
(Cis)-(F)	32/25	427,373	-8mq+5ok	verminderte Quarte
(D)-(Ges*)	32/25	427,373	-8mq+5ok	verminderte Quarte
(Dis*)-(G)	32/25	427,373	-8mq+5ok	verminderte Quarte
Dis-G	32/25	427,373	-2t+ok	verminderte Quarte
(E)-(As*)	32/25	427,373	-8mq+5ok	verminderte Quarte
E-As	32/25	427,373	-2t+ok	verminderte Quarte
(Fis)-(B)	32/25	427,373	-8mq+5ok	verminderte Quarte
Fis-B	32/25	427,373	-2t+ok	verminderte Quarte
Gis-c	32/25	427,373	-2t+ok	verminderte Quarte
(Gis)-(c)	32/25	427,373	-8mq+5ok	verminderte Quarte
A-des	32/25	427,373	-2t+ok	verminderte Quarte
(A)-(des*)	32/25	427,373	-8mq+5ok	verminderte Quarte
Ais-d	32/25	427,373	-2t+ok	verminderte Quarte
(Ais*)-(d)	32/25	427,373	-8mq+5ok	verminderte Quarte
(H)-(es)	32/25	427,373	-8mq+5ok	verminderte Quarte
H-es	32/25	427,373	-2t+ok	verminderte Quarte
[Ges*]-[Ais*]	602409/469571	431,280	16q-9ok	pythagoreische doppelt übermäßige Sekunde
Es-Gis	125/96	456,986	3t-q	(kleinere) übermäßige Terz
B-dis	125/96	456,986	3t-q	(kleinere) übermäßige Terz
(Des*)-(Fis)	(25/64)w^3	462,363	11mq-6ok	mitteltönig übermäßige Terz
(Es)-(Gis)	(25/64)w^3	462,363	11mq-6ok	mitteltönig übermäßige Terz
(F)-(Ais*)	(25/64)w^3	462,363	11mq-6ok	mitteltönig übermäßige Terz
(Ges*)-(H)	(25/64)w^3	462,363	11mq-6ok	mitteltönig übermäßige Terz
(As*)-(cis)	(25/64)w^3	462,363	11mq-6ok	mitteltönig übermäßige Terz
(B)-(dis*)	(25/64)w^3	462,363	11mq-6ok	mitteltönig übermäßige Terz
[Cis]-[Ges*]	2097152/1594323	474,585	-13q+8ok	pythagoreische doppelt verminderte Quinte
[Dis*]-[As*]	2097152/1594323	474,585	-13q+8ok	pythagoreische doppelt verminderte Quinte
[Gis]-[des*]	2097152/1594323	474,585	-13q+8ok	pythagoreische doppelt verminderte Quinte
[Ais*]-[es]	2097152/1594323	474,585	-13q+8ok	pythagoreische doppelt verminderte Quinte
Des-Fis	675/512	478,492	2t+3q-2ok	(größere) übermäßige Terz
F-Ais	675/512	478,492	2t+3q-2ok	(größere) übermäßige Terz
Ges-H	675/512	478,492	2t+3q-2ok	(größere) übermäßige Terz
As-cis	675/512	478,492	2t+3q-2ok	(größere) übermäßige Terz
C-F	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
[C]-[F]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
Cis-Fis	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
[Cis]-[Fis]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
Des-Ges	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
[Des*]-[Ges*]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
D-G	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
[D]-[G]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
Dis-Gis	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
[Dis*]-[Gis]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
[Es]-[As*]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
Es-As	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
[E]-[A]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
E-A	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
[F]-[B]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
[Fis]-[H]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
Fis-H	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
G-c	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
[G]-[c]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
[Gis]-[cis]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
As-des	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
[As*]-[des*]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
[A]-[d]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
[Ais*]-[dis*]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
Ais-dis	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
[B]-[es]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
B-es	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
H-e	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
[H]-[e]	4/3	498,045	-q+ok	Quarte
		500,000		gleichstufige Quarte
(C)-(F)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte
(Cis)-(Fis)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte

(Des*)-(Ges*)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte
(D)-(G)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte
(Dis*)-(Gis)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte
(Es)-(As*)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte
(E)-(A)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte
(F)-(B)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte
(Fis)-(H)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte
(G)-(c)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte
(Gis)-(cis)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte
(As*)-(des*)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte
(A)-(d)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte
(Ais*)-(dis*)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte
(B)-(es)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte
(H)-(e)	(2/5)w^3	503,422	-mq+ok	mitteltönige Quarte
Cis-Ges	8192/6075	517,598	-2t-5q+4ok	doppelt verminderte Quinte
F-B	27/20	519,551	-t+3q-ok	unreine Quarte (In C-Dur II. Stufe a-d)
Gis-cis	27/20	519,551	-t+3q-ok	unreine Quarte (In C-Dur II. Stufe a-d)
A-d	27/20	519,551	-t+3q-ok	unreine Quarte (In C-Dur II. Stufe a-d)
[Des*]-[Fis]	177147/131072	521,505	11q-6ok	pythagoreische übermäßige Terz
[Es]-[Gis]	177147/131072	521,505	11q-6ok	pythagoreische übermäßige Terz
[F]-[Ais*]	177147/131072	521,505	11q-6ok	pythagoreische übermäßige Terz
[Ges*]-[H]	177147/131072	521,505	11q-6ok	pythagoreische übermäßige Terz
[As*]-[cis]	177147/131072	521,505	11q-6ok	pythagoreische übermäßige Terz
[B]-[dis*]	177147/131072	521,505	11q-6ok	pythagoreische übermäßige Terz
Dis-As	512/375	539,104	-3t-q+2ok	doppelt verminderte Quinte
Gis-des	512/375	539,104	-3t-q+2ok	doppelt verminderte Quinte
Ais-es	512/375	539,104	-3t-q+2ok	doppelt verminderte Quinte
(Cis)-(Ges*)	(256/625)w^3	544,480	-13mq+8ok	mitteltönig doppelt verminderte Quinte
(Dis*)-(As*)	(256/625)w^3	544,480	-13mq+8ok	mitteltönig doppelt verminderte Quinte
(Gis)-(des*)	(256/625)w^3	544,480	-13mq+8ok	mitteltönig doppelt verminderte Quinte
(Ais*)-(es)	(256/625)w^3	544,480	-13mq+8ok	mitteltönig doppelt verminderte Quinte
D-Gis	25/18	568,717	2t-2q+ok	(kleinere) übermäßige Quarte
Es-A	25/18	568,717	2t-2q+ok	(kleinere) übermäßige Quarte
B-e	25/18	568,717	2t-2q+ok	(kleinere) übermäßige Quarte
(C)-(Fis)	(5/8)w^2	579,471	6mq-3ok	mitteltönige übermäßige Quarte, mitteltön
(Des*)-(G)	(5/8)w^2	579,471	6mq-3ok	mitteltönige übermäßige Quarte, mitteltön
(D)-(Gis)	(5/8)w^2	579,471	6mq-3ok	mitteltönige übermäßige Quarte, mitteltön
(Es)-(A)	(5/8)w^2	579,471	6mq-3ok	mitteltönige übermäßige Quarte, mitteltön
(E)-(Ais*)	(5/8)w^2	579,471	6mq-3ok	mitteltönige übermäßige Quarte, mitteltön
(F)-(H)	(5/8)w^2	579,471	6mq-3ok	mitteltönige übermäßige Quarte, mitteltön
(Ges*)-(c)	(5/8)w^2	579,471	6mq-3ok	mitteltönige übermäßige Quarte, mitteltön
(G)-(cis)	(5/8)w^2	579,471	6mq-3ok	mitteltönige übermäßige Quarte, mitteltön
(As*)-(d)	(5/8)w^2	579,471	6mq-3ok	mitteltönige übermäßige Quarte, mitteltön
(A)-(dis*)	(5/8)w^2	579,471	6mq-3ok	mitteltönige übermäßige Quarte, mitteltön
(B)-(e)	(5/8)w^2	579,471	6mq-3ok	mitteltönige übermäßige Quarte, mitteltön
[C]-[Ges*]	1024/729	588,270	-6q+4ok	pythagoreische verminderte Quinte
[Cis]-[G]	1024/729	588,270	-6q+4ok	pythagoreische verminderte Quinte
[D]-[As*]	1024/729	588,270	-6q+4ok	pythagoreische verminderte Quinte
[Dis*]-[A]	1024/729	588,270	-6q+4ok	pythagoreische verminderte Quinte
[E]-[B]	1024/729	588,270	-6q+4ok	pythagoreische verminderte Quinte
[Fis]-[c]	1024/729	588,270	-6q+4ok	pythagoreische verminderte Quinte
[G]-[des*]	1024/729	588,270	-6q+4ok	pythagoreische verminderte Quinte
[Gis]-[d]	1024/729	588,270	-6q+4ok	pythagoreische verminderte Quinte
[A]-[es]	1024/729	588,270	-6q+4ok	pythagoreische verminderte Quinte
[Ais*]-[e]	1024/729	588,270	-6q+4ok	pythagoreische verminderte Quinte
[H]-[f]	1024/729	588,270	-6q+4ok	pythagoreische verminderte Quinte
C-Fis	45/32	590,224	t+2q-ok	Tritonus, übermäßige Quarte
Des-G	45/32	590,224	t+2q-ok	Tritonus, übermäßige Quarte
E-Ais	45/32	590,224	t+2q-ok	Tritonus, übermäßige Quarte
F-H	45/32	590,224	t+2q-ok	Tritonus, übermäßige Quarte
Ges-c	45/32	590,224	t+2q-ok	Tritonus, übermäßige Quarte
G-cis	45/32	590,224	t+2q-ok	Tritonus, übermäßige Quarte
As-d	45/32	590,224	t+2q-ok	Tritonus, übermäßige Quarte
A-dis	45/32	590,224	t+2q-ok	Tritonus, übermäßige Quarte
		600,000		gleichstufiger Tritonus
C-Ges	64/45	609,776	-t-2q+2ok	(kleinere) verminderte Quinte
Cis-G	64/45	609,776	-t-2q+2ok	(kleinere) verminderte Quinte
D-As	64/45	609,776	-t-2q+2ok	(kleinere) verminderte Quinte
Dis-A	64/45	609,776	-t-2q+2ok	(kleinere) verminderte Quinte
Fis-c	64/45	609,776	-t-2q+2ok	(kleinere) verminderte Quinte
G-des	64/45	609,776	-t-2q+2ok	(kleinere) verminderte Quinte
Ais-e	64/45	609,776	-t-2q+2ok	(kleinere) verminderte Quinte
H-f	64/45	609,776	-t-2q+2ok	(kleinere) verminderte Quinte
[C]-[Fis]	729/512	611,730	6q-3ok	pythagoreische übermäßge Quarte=pythagore
[Des*]-[G]	729/512	611,730	6q-3ok	pythagoreische übermäßge Quarte=pythagore
[D]-[Gis]	729/512	611,730	6q-3ok	pythagoreische übermäßge Quarte=pythagore
[Es]-[A]	729/512	611,730	6q-3ok	pythagoreische übermäßge Quarte=pythagore

[E]-[Ais*]	729/512	611,730 6q-3ok	pythagoreische übermäßge Quarte=pythagore
[F]-[H]	729/512	611,730 6q-3ok	pythagoreische übermäßge Quarte=pythagore
[Ges*]-[c]	729/512	611,730 6q-3ok	pythagoreische übermäßge Quarte=pythagore
[G]-[cis]	729/512	611,730 6q-3ok	pythagoreische übermäßge Quarte=pythagore
[As*]-[d]	729/512	611,730 6q-3ok	pythagoreische übermäßge Quarte=pythagore
[A]-[dis*]	729/512	611,730 6q-3ok	pythagoreische übermäßge Quarte=pythagore
[B]-[e]	729/512	611,730 6q-3ok	pythagoreische übermäßge Quarte=pythagore
(C)-(Ges*)	(16/25)w^2	620,529 -6mq+4ok	mitteltönige verminderte Quinte
(Cis)-(G)	(16/25)w^2	620,529 -6mq+4ok	mitteltönige verminderte Quinte
(D)-(As*)	(16/25)w^2	620,529 -6mq+4ok	mitteltönige verminderte Quinte
(Dis*)-(A)	(16/25)w^2	620,529 -6mq+4ok	mitteltönige verminderte Quinte
(E)-(B)	(16/25)w^2	620,529 -6mq+4ok	mitteltönige verminderte Quinte
(Fis)-(c)	(16/25)w^2	620,529 -6mq+4ok	mitteltönige verminderte Quinte
(G)-(des*)	(16/25)w^2	620,529 -6mq+4ok	mitteltönige verminderte Quinte
(Gis)-(d)	(16/25)w^2	620,529 -6mq+4ok	mitteltönige verminderte Quinte
(A)-(es)	(16/25)w^2	620,529 -6mq+4ok	mitteltönige verminderte Quinte
(Ais*)-(e)	(16/25)w^2	620,529 -6mq+4ok	mitteltönige verminderte Quinte
(H)-(f)	(16/25)w^2	620,529 -6mq+4ok	mitteltönige verminderte Quinte
E-B	36/25	631,283 -2t+2q	(größere) verminderte Quinte
Gis-d	36/25	631,283 -2t+2q	(größere) verminderte Quinte
A-es	36/25	631,283 -2t+2q	(größere) verminderte Quinte
(Des*)-(Gis)	(125/128)w	655,520 13mq-7ok	mitteltönig doppelt übermäßge Quart
(Es)-(Ais*)	(125/128)w	655,520 13mq-7ok	mitteltönig doppelt übermäßge Quart
(Ges*)-(cis)	(125/128)w	655,520 13mq-7ok	mitteltönig doppelt übermäßge Quart
(As*)-(dis*)	(125/128)w	655,520 13mq-7ok	mitteltönig doppelt übermäßge Quart
Des-Gis	375/256	660,896 3t+q-ok	doppelt übermäßige Quarte
Es-Ais	375/256	660,896 3t+q-ok	doppelt übermäßige Quarte
As-dis	375/256	660,896 3t+q-ok	doppelt übermäßige Quarte
[Cis]-[As*]	262144/177147	678,495 -11q+7ok	pythagoreische verminderte Sexte
[Dis*]-[B]	262144/177147	678,495 -11q+7ok	pythagoreische verminderte Sexte
[Fis]-[des*]	262144/177147	678,495 -11q+7ok	pythagoreische verminderte Sexte
[Gis]-[es]	262144/177147	678,495 -11q+7ok	pythagoreische verminderte Sexte
[Ais*]-[f]	262144/177147	678,495 -11q+7ok	pythagoreische verminderte Sexte
[H]-[ges*]	262144/177147	678,495 -11q+7ok	pythagoreische verminderte Sexte
Cis-Gis	40/27	680,449 t-3q+2ok	unreine Quinte (In C-Dur d-a des Akkords
D-A	40/27	680,449 t-3q+2ok	unreine Quinte (In C-Dur d-a des Akkords
B-f	40/27	680,449 t-3q+2ok	unreine Quinte (In C-Dur d-a des Akkords
Ges-cis	6075/4096	682,402 2t+5q-3ok	doppelt verminderte Quarte
(C)-(G)	w	696,578 mq	mitteltönige Quinte
(Cis)-(Gis)	w	696,578 mq	mitteltönige Quinte
(Des*)-(As*)	w	696,578 mq	mitteltönige Quinte
(D)-(A)	w	696,578 mq	mitteltönige Quinte
(Dis*)-(Ais*)	w	696,578 mq	mitteltönige Quinte
(Es)-(B)	w	696,578 mq	mitteltönige Quinte
(E)-(H)	w	696,578 mq	mitteltönige Quinte
(F)-(c)	w	696,578 mq	mitteltönige Quinte
(Fis)-(cis)	w	696,578 mq	mitteltönige Quinte
(Ges*)-(des*)	w	696,578 mq	mitteltönige Quinte
(G)-(d)	w	696,578 mq	mitteltönige Quinte
(Gis)-(dis*)	w	696,578 mq	mitteltönige Quinte
(As*)-(es)	w	696,578 mq	mitteltönige Quinte
(A)-(e)	w	696,578 mq	mitteltönige Quinte
(B)-(f)	w	696,578 mq	mitteltönige Quinte
(H)-(fis)	w	696,578 mq	mitteltönige Quinte
		700,000	gleichstufige Quinte
[C]-[G]	3/2	701,955 q	Quinte
C-G	3/2	701,955 q	Quinte
[Cis]-[Gis]	3/2	701,955 q	Quinte
[Des*]-[As*]	3/2	701,955 q	Quinte
Des-As	3/2	701,955 q	Quinte
[D]-[A]	3/2	701,955 q	Quinte
[Dis*]-[Ais*]	3/2	701,955 q	Quinte
Dis-Ais	3/2	701,955 q	Quinte
Es-B	3/2	701,955 q	Quinte
[Es]-[B]	3/2	701,955 q	Quinte
[E]-[H]	3/2	701,955 q	Quinte
E-H	3/2	701,955 q	Quinte
F-c	3/2	701,955 q	Quinte
[F]-[c]	3/2	701,955 q	Quinte
Fis-cis	3/2	701,955 q	Quinte
[Fis]-[cis]	3/2	701,955 q	Quinte
[Ges*]-[des*]	3/2	701,955 q	Quinte
Ges-des	3/2	701,955 q	Quinte
[G]-[d]	3/2	701,955 q	Quinte
G-d	3/2	701,955 q	Quinte
Gis-dis	3/2	701,955 q	Quinte
[Gis]-[dis*]	3/2	701,955 q	Quinte

[As*]-[es]	3/2	701,955	q	Quinte
As-es	3/2	701,955	q	Quinte
[A]-[e]	3/2	701,955	q	Quinte
A-e	3/2	701,955	q	Quinte
[B]-[f]	3/2	701,955	q	Quinte
[H]-[fis]	3/2	701,955	q	Quinte
H-fis	3/2	701,955	q	Quinte
Cis-As	1024/675	721,508	-2t-3q+3ok	(kleinere) verminderte Sexte
Fis-des	1024/675	721,508	-2t-3q+3ok	(kleinere) verminderte Sexte
Ais-f	1024/675	721,508	-2t-3q+3ok	(kleinere) verminderte Sexte
H-ges	1024/675	721,508	-2t-3q+3ok	(kleinere) verminderte Sexte
[Des*]-[Gis]	1594323/1048576	725,415	13q-7ok	pythagoreische doppelt übermäße Quarte <
[Es]-[Ais*]	1594323/1048576	725,415	13q-7ok	pythagoreische doppelt übermäße Quarte <
[Ges*]-[cis]	1594323/1048576	725,415	13q-7ok	pythagoreische doppelt übermäße Quarte <
[As*]-[dis*]	1594323/1048576	725,415	13q-7ok	pythagoreische doppelt übermäße Quarte <
(Cis)-(As*)	(128/125)w	737,637	-11mq+7ok	mitteltönig verminderte Sexte
(Dis*)-(B)	(128/125)w	737,637	-11mq+7ok	mitteltönig verminderte Sexte
(Fis)-(des*)	(128/125)w	737,637	-11mq+7ok	mitteltönig verminderte Sexte
(Gis)-(es)	(128/125)w	737,637	-11mq+7ok	mitteltönig verminderte Sexte
(Ais*)-(f)	(128/125)w	737,637	-11mq+7ok	mitteltönig verminderte Sexte
(H)-(ges*)	(128/125)w	737,637	-11mq+7ok	mitteltönig verminderte Sexte
Dis-B	192/125	743,014	-3t+q+ok	(größere) verminderte Sexte
Gis-es	192/125	743,014	-3t+q+ok	(größere) verminderte Sexte
[Ais*]-[ges*]	939142/602409	768,720	-16q+10ok	pythagoreische doppelt verminderte Septim
(C)-(Gis)	25/16	772,627	8mq-4ok	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
C-Gis	25/16	772,627	2t	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
(Des*)-(A)	25/16	772,627	8mq-4ok	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
Des-A	25/16	772,627	2t	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
(D)-(Ais*)	25/16	772,627	8mq-4ok	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
D-Ais	25/16	772,627	2t	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
(Es)-(H)	25/16	772,627	8mq-4ok	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
Es-H	25/16	772,627	2t	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
(F)-(cis)	25/16	772,627	8mq-4ok	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
(Ges*)-(d)	25/16	772,627	8mq-4ok	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
G-dis	25/16	772,627	2t	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
(G)-(dis*)	25/16	772,627	8mq-4ok	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
As-e	25/16	772,627	2t	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
(As*)-(e)	25/16	772,627	8mq-4ok	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
B-fis	25/16	772,627	2t	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
(B)-(fis)	25/16	772,627	8mq-4ok	kleine übermäßige Quinte, Doppelterz
[C]-[As*]	128/81	792,180	-4q+3ok	pythagoreische kleine Sexte
[Cis]-[A]	128/81	792,180	-4q+3ok	pythagoreische kleine Sexte
Cis-A	128/81	792,180	-4q+3ok	pythagoreische kleine Sexte
[D]-[B]	128/81	792,180	-4q+3ok	pythagoreische kleine Sexte
[Dis*]-[H]	128/81	792,180	-4q+3ok	pythagoreische kleine Sexte
[E]-[c]	128/81	792,180	-4q+3ok	pythagoreische kleine Sexte
[F]-[des*]	128/81	792,180	-4q+3ok	pythagoreische kleine Sexte
[Fis]-[d]	128/81	792,180	-4q+3ok	pythagoreische kleine Sexte
[G]-[es]	128/81	792,180	-4q+3ok	pythagoreische kleine Sexte
[Gis]-[e]	128/81	792,180	-4q+3ok	pythagoreische kleine Sexte
[A]-[f]	128/81	792,180	-4q+3ok	pythagoreische kleine Sexte
[Ais*]-[fis]	128/81	792,180	-4q+3ok	pythagoreische kleine Sexte
[B]-[ges*]	128/81	792,180	-4q+3ok	pythagoreische kleine Sexte
B-ges	128/81	792,180	-4q+3ok	pythagoreische kleine Sexte
[H]-[g]	128/81	792,180	-4q+3ok	pythagoreische kleine Sexte
F-cis	405/256	794,134	t+4q-2ok	(größere) übermäßige Quinte
Ges-d	405/256	794,134	t+4q-2ok	(größere) übermäßige Quinte
		800,000		gleichstufige kleine Sexte
C-As	8/5	813,686	-t+ok	kleine Sexte
(C)-(As*)	8/5	813,686	-4mq+3ok	kleine Sexte
(Cis)-(A)	8/5	813,686	-4mq+3ok	kleine Sexte
D-B	8/5	813,686	-t+ok	kleine Sexte
(D)-(B)	8/5	813,686	-4mq+3ok	kleine Sexte
(Dis*)-(H)	8/5	813,686	-4mq+3ok	kleine Sexte
Dis-H	8/5	813,686	-t+ok	kleine Sexte
(E)-(c)	8/5	813,686	-4mq+3ok	kleine Sexte
E-c	8/5	813,686	-t+ok	kleine Sexte
F-des	8/5	813,686	-t+ok	kleine Sexte
(F)-(des*)	8/5	813,686	-4mq+3ok	kleine Sexte
(Fis)-(d)	8/5	813,686	-4mq+3ok	kleine Sexte
Fis-d	8/5	813,686	-t+ok	kleine Sexte
(G)-(es)	8/5	813,686	-4mq+3ok	kleine Sexte
G-es	8/5	813,686	-t+ok	kleine Sexte
(Gis)-(e)	8/5	813,686	-4mq+3ok	kleine Sexte
Gis-e	8/5	813,686	-t+ok	kleine Sexte
(A)-(f)	8/5	813,686	-4mq+3ok	kleine Sexte
A-f	8/5	813,686	-t+ok	kleine Sexte

Ais-fis	8/5	813,686	-t+ok	kleine Sexte
(Ais*)-(fis)	8/5	813,686	-4mq+3ok	kleine Sexte
(B)-(ges*)	8/5	813,686	-4mq+3ok	kleine Sexte
H-g	8/5	813,686	-t+ok	kleine Sexte
(H)-(g)	8/5	813,686	-4mq+3ok	kleine Sexte
[C]-[Gis]	6561/4096	815,640	8q-4ok	pythagoreische übermäßge Quinte
[Des*]-[A]	6561/4096	815,640	8q-4ok	pythagoreische übermäßge Quinte
[D]-[Ais*]	6561/4096	815,640	8q-4ok	pythagoreische übermäßge Quinte
[Es]-[H]	6561/4096	815,640	8q-4ok	pythagoreische übermäßge Quinte
[F]-[cis]	6561/4096	815,640	8q-4ok	pythagoreische übermäßge Quinte
[Ges*]-[d]	6561/4096	815,640	8q-4ok	pythagoreische übermäßge Quinte
[G]-[dis*]	6561/4096	815,640	8q-4ok	pythagoreische übermäßge Quinte
[As*]-[e]	6561/4096	815,640	8q-4ok	pythagoreische übermäßge Quinte
[B]-[fis]	6561/4096	815,640	8q-4ok	pythagoreische übermäßge Quinte
Ais-ges	16384/10125	833,239	-3t-4q+4ok	doppelt verminderte Septime
(Des*)-(Ais*)	(125/256)w^3	848,676	15mq-8ok	mitteltönig doppelt übermäßge Quinte
(Ges*)-(dis*)	(125/256)w^3	848,676	15mq-8ok	mitteltönig doppelt übermäßge Quinte
(Ais*)-(ges*)	1024/625	854,745	-16mq+10ok	mitteltönige doppelt verminderte Septime
Des-Ais	3375/2048	864,806	3t+3q-2ok	doppelt übermäßige Quinte
Ges-dis	3375/2048	864,806	3t+3q-2ok	doppelt übermäßige Quinte
[Cis]-[B]	32768/19683	882,405	-9q+6ok	pythagoreische verminderte Septime
[Dis*]-[c]	32768/19683	882,405	-9q+6ok	pythagoreische verminderte Septime
[E]-[des*]	32768/19683	882,405	-9q+6ok	pythagoreische verminderte Septime
[Fis]-[es]	32768/19683	882,405	-9q+6ok	pythagoreische verminderte Septime
[Gis]-[f]	32768/19683	882,405	-9q+6ok	pythagoreische verminderte Septime
[A]-[ges*]	32768/19683	882,405	-9q+6ok	pythagoreische verminderte Septime
[Ais*]-[g]	32768/19683	882,405	-9q+6ok	pythagoreische verminderte Septime
[H]-[as*]	32768/19683	882,405	-9q+6ok	pythagoreische verminderte Septime
C-A	5/3	884,359	t-q+ok	große Sexte
Cis-Ais	5/3	884,359	t-q+ok	große Sexte
D-H	5/3	884,359	t-q+ok	große Sexte
Es-c	5/3	884,359	t-q+ok	große Sexte
Fis-dis	5/3	884,359	t-q+ok	große Sexte
G-e	5/3	884,359	t-q+ok	große Sexte
As-f	5/3	884,359	t-q+ok	große Sexte
B-g	5/3	884,359	t-q+ok	große Sexte
H-gis	5/3	884,359	t-q+ok	große Sexte
(C)-(A)	(1/2)w^3	889,735	3mq-ok	mitteltönige große Sexte
(Cis)-(Ais*)	(1/2)w^3	889,735	3mq-ok	mitteltönige große Sexte
(Des*)-(B)	(1/2)w^3	889,735	3mq-ok	mitteltönige große Sexte
(D)-(H)	(1/2)w^3	889,735	3mq-ok	mitteltönige große Sexte
(Es)-(c)	(1/2)w^3	889,735	3mq-ok	mitteltönige große Sexte
(E)-(cis)	(1/2)w^3	889,735	3mq-ok	mitteltönige große Sexte
(F)-(d)	(1/2)w^3	889,735	3mq-ok	mitteltönige große Sexte
(Fis)-(dis*)	(1/2)w^3	889,735	3mq-ok	mitteltönige große Sexte
(Ges*)-(es)	(1/2)w^3	889,735	3mq-ok	mitteltönige große Sexte
(G)-(e)	(1/2)w^3	889,735	3mq-ok	mitteltönige große Sexte
(As*)-(f)	(1/2)w^3	889,735	3mq-ok	mitteltönige große Sexte
(A)-(fis)	(1/2)w^3	889,735	3mq-ok	mitteltönige große Sexte
(B)-(g)	(1/2)w^3	889,735	3mq-ok	mitteltönige große Sexte
(H)-(gis)	(1/2)w^3	889,735	3mq-ok	mitteltönige große Sexte
		900,000		gleichstufige große Sexte
[C]-[A]	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
[Cis]-[Ais*]	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
Des-B	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
[Des*]-[B]	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
[D]-[H]	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
[Es]-[c]	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
[E]-[cis]	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
E-cis	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
F-d	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
[F]-[d]	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
[Fis]-[dis*]	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
[Ges*]-[es]	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
Ges-es	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
[G]-[e]	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
[As*]-[f]	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
A-fis	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
[A]-[fis]	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
[B]-[g]	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
[H]-[gis]	27/16	905,865	3q-ok	pythagoreische große Sexte (im II. Akkord
Cis-B	128/75	925,418	-2t-q+2ok	(größere) verminderte Septime
Dis-c	128/75	925,418	-2t-q+2ok	(größere) verminderte Septime
E-des	128/75	925,418	-2t-q+2ok	(größere) verminderte Septime
Fis-es	128/75	925,418	-2t-q+2ok	(größere) verminderte Septime
Gis-f	128/75	925,418	-2t-q+2ok	(größere) verminderte Septime
A-ges	128/75	925,418	-2t-q+2ok	(größere) verminderte Septime

Ais-g	128/75	925,418	-2t-q+2ok	(größere) verminderte Septime
H-as	128/75	925,418	-2t-q+2ok	(größere) verminderte Septime
[Des*]-[Ais*]	803212/469571	929,325	15q-8ok	pythagoreische doppelt übermäßge Quinte <
[Ges*]-[dis*]	803212/469571	929,325	15q-8ok	pythagoreische doppelt übermäßge Quinte <
(Cis)-(B)	(64/125)w^3	930,794	-9mq+6ok	mitteltönig verminderte Septime
(Dis*)-(c)	(64/125)w^3	930,794	-9mq+6ok	mitteltönig verminderte Septime
(E)-(des*)	(64/125)w^3	930,794	-9mq+6ok	mitteltönig verminderte Septime
(Fis)-(es)	(64/125)w^3	930,794	-9mq+6ok	mitteltönig verminderte Septime
(Gis)-(f)	(64/125)w^3	930,794	-9mq+6ok	mitteltönig verminderte Septime
(A)-(ges*)	(64/125)w^3	930,794	-9mq+6ok	mitteltönig verminderte Septime
(Ais*)-(g)	(64/125)w^3	930,794	-9mq+6ok	mitteltönig verminderte Septime
(H)-(as*)	(64/125)w^3	930,794	-9mq+6ok	mitteltönig verminderte Septime
B-gis	125/72	955,031	3t-2q+ok	(kleinere) übermäßige Sexte
(C)-(Ais*)	(25/32)w^2	965,784	10mq-5ok	mitteltönige übermäßge Sexte
(Des*)-(H)	(25/32)w^2	965,784	10mq-5ok	mitteltönige übermäßge Sexte
(Es)-(cis)	(25/32)w^2	965,784	10mq-5ok	mitteltönige übermäßge Sexte
(F)-(dis*)	(25/32)w^2	965,784	10mq-5ok	mitteltönige übermäßge Sexte
(Ges*)-(e)	(25/32)w^2	965,784	10mq-5ok	mitteltönige übermäßge Sexte
(As*)-(fis)	(25/32)w^2	965,784	10mq-5ok	mitteltönige übermäßge Sexte
(B)-(gis)	(25/32)w^2	965,784	10mq-5ok	mitteltönige übermäßge Sexte
[Dis*]-[des*]	1408713/803212	972,630	-14q+9ok	pythagoreische doppelt verminderte Oktave
[Gis]-[ges*]	1408713/803212	972,630	-14q+9ok	pythagoreische doppelt verminderte Oktave
[Ais*]-[as*]	1408713/803212	972,630	-14q+9ok	pythagoreische doppelt verminderte Oktave
C-Ais	225/128	976,537	2t+2q-ok	(größere) übermäßige Sexte
Des-H	225/128	976,537	2t+2q-ok	(größere) übermäßige Sexte
Es-cis	225/128	976,537	2t+2q-ok	(größere) übermäßige Sexte
F-dis	225/128	976,537	2t+2q-ok	(größere) übermäßige Sexte
Ges-e	225/128	976,537	2t+2q-ok	(größere) übermäßige Sexte
As-fis	225/128	976,537	2t+2q-ok	(größere) übermäßige Sexte
[C]-[B]	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
Cis-H	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
[Cis]-[H]	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
D-c	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
[D]-[c]	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
[Dis*]-[cis]	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
[Es]-[des*]	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
Es-des	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
[E]-[d]	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
[F]-[es]	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
[Fis]-[e]	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
Fis-e	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
[G]-[f]	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
G-f	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
[Gis]-[fis]	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
As-ges	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
[As*]-[ges*]	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
[A]-[g]	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
Ais-gis	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
[Ais*]-[gis]	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
B-as	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
[B]-[as*]	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
H-a	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
[H]-[a]	16/9	996,090	-2q+2ok	pythagoreische kleine Septime
		1000,000		gleichstufige kleine Septime
(C)-(B)	(4/5)w^2	1006,843	-2mq+2ok	mitteltönige kleine Septime
(Cis)-(H)	(4/5)w^2	1006,843	-2mq+2ok	mitteltönige kleine Septime
(D)-(c)	(4/5)w^2	1006,843	-2mq+2ok	mitteltönige kleine Septime
(Dis*)-(cis)	(4/5)w^2	1006,843	-2mq+2ok	mitteltönige kleine Septime
(Es)-(des*)	(4/5)w^2	1006,843	-2mq+2ok	mitteltönige kleine Septime
(E)-(d)	(4/5)w^2	1006,843	-2mq+2ok	mitteltönige kleine Septime
(F)-(es)	(4/5)w^2	1006,843	-2mq+2ok	mitteltönige kleine Septime
(Fis)-(e)	(4/5)w^2	1006,843	-2mq+2ok	mitteltönige kleine Septime
(G)-(f)	(4/5)w^2	1006,843	-2mq+2ok	mitteltönige kleine Septime
(Gis)-(fis)	(4/5)w^2	1006,843	-2mq+2ok	mitteltönige kleine Septime
(As*)-(ges*)	(4/5)w^2	1006,843	-2mq+2ok	mitteltönige kleine Septime
(A)-(g)	(4/5)w^2	1006,843	-2mq+2ok	mitteltönige kleine Septime
(Ais*)-(gis)	(4/5)w^2	1006,843	-2mq+2ok	mitteltönige kleine Septime
(B)-(as*)	(4/5)w^2	1006,843	-2mq+2ok	mitteltönige kleine Septime
(H)-(a)	(4/5)w^2	1006,843	-2mq+2ok	mitteltönige kleine Septime
C-B	9/5	1017,596	-t+2q	kleine Septime
Dis-cis	9/5	1017,596	-t+2q	kleine Septime
E-d	9/5	1017,596	-t+2q	kleine Septime
F-es	9/5	1017,596	-t+2q	kleine Septime
Gis-fis	9/5	1017,596	-t+2q	kleine Septime
A-g	9/5	1017,596	-t+2q	kleine Septime
[C]-[Ais*]	59049/32768	1019,550	10q-5ok	pythagoreische übermäßge Sexte
[Des*]-[H]	59049/32768	1019,550	10q-5ok	pythagoreische übermäßge Sexte

[Es]-[cis]	59049/32768	1019,550	10q-5ok	pythagoreische übermäßge Sexte
[F]-[dis*]	59049/32768	1019,550	10q-5ok	pythagoreische übermäßge Sexte
[Ges*]-[e]	59049/32768	1019,550	10q-5ok	pythagoreische übermäßge Sexte
[As*]-[fis]	59049/32768	1019,550	10q-5ok	pythagoreische übermäßge Sexte
[B]-[gis]	59049/32768	1019,550	10q-5ok	pythagoreische übermäßge Sexte
Dis-des	2048/1125	1037,149	-3t-2q+3ok	doppelt verminderte Oktave
Gis-ges	2048/1125	1037,149	-3t-2q+3ok	doppelt verminderte Oktave
Ais-as	2048/1125	1037,149	-3t-2q+3ok	doppelt verminderte Oktave
(Dis*)-(des*)	(512/625)w^2	1047,902	-14mq+9ok	mitteltönig doppelt verminderte Oktave
(Gis)-(ges*)	(512/625)w^2	1047,902	-14mq+9ok	mitteltönig doppelt verminderte Oktave
(Ais*)-(as*)	(512/625)w^2	1047,902	-14mq+9ok	mitteltönig doppelt verminderte Oktave
B-a	50/27	1066,762	2t-3q+2ok	(kleinere) große Septime
(C)-(H)	(5/4)w	1082,892	5mq-2ok	mitteltönige große Septime
(Des*)-(c)	(5/4)w	1082,892	5mq-2ok	mitteltönige große Septime
(D)-(cis)	(5/4)w	1082,892	5mq-2ok	mitteltönige große Septime
(Es)-(d)	(5/4)w	1082,892	5mq-2ok	mitteltönige große Septime
(E)-(dis*)	(5/4)w	1082,892	5mq-2ok	mitteltönige große Septime
(F)-(e)	(5/4)w	1082,892	5mq-2ok	mitteltönige große Septime
(Ges*)-(f)	(5/4)w	1082,892	5mq-2ok	mitteltönige große Septime
(G)-(fis)	(5/4)w	1082,892	5mq-2ok	mitteltönige große Septime
(As*)-(g)	(5/4)w	1082,892	5mq-2ok	mitteltönige große Septime
(A)-(gis)	(5/4)w	1082,892	5mq-2ok	mitteltönige große Septime
(B)-(a)	(5/4)w	1082,892	5mq-2ok	mitteltönige große Septime
(H)-(ais*)	(5/4)w	1082,892	5mq-2ok	mitteltönige große Septime
[Cis]-[c]	4096/2187	1086,315	-7q+5ok	pythagoreische verminderte Oktave
[D]-[des*]	4096/2187	1086,315	-7q+5ok	pythagoreische verminderte Oktave
[Dis*]-[d]	4096/2187	1086,315	-7q+5ok	pythagoreische verminderte Oktave
[E]-[es]	4096/2187	1086,315	-7q+5ok	pythagoreische verminderte Oktave
[Fis]-[f]	4096/2187	1086,315	-7q+5ok	pythagoreische verminderte Oktave
[G]-[ges*]	4096/2187	1086,315	-7q+5ok	pythagoreische verminderte Oktave
[Gis]-[g]	4096/2187	1086,315	-7q+5ok	pythagoreische verminderte Oktave
[A]-[as*]	4096/2187	1086,315	-7q+5ok	pythagoreische verminderte Oktave
[Ais*]-[a]	4096/2187	1086,315	-7q+5ok	pythagoreische verminderte Oktave
[H]-[b]	4096/2187	1086,315	-7q+5ok	pythagoreische verminderte Oktave
C-H	15/8	1088,269	t+q	große Septime
Des-c	15/8	1088,269	t+q	große Septime
D-cis	15/8	1088,269	t+q	große Septime
Es-d	15/8	1088,269	t+q	große Septime
E-dis	15/8	1088,269	t+q	große Septime
F-e	15/8	1088,269	t+q	große Septime
Ges-f	15/8	1088,269	t+q	große Septime
G-fis	15/8	1088,269	t+q	große Septime
As-g	15/8	1088,269	t+q	große Septime
A-gis	15/8	1088,269	t+q	große Septime
H-ais	15/8	1088,269	t+q	große Septime
		1100,000		gleichstufige große Septime
Cis-c	256/135	1107,821	-t-3q+3ok	(kleinere) verminderte Oktave
D-des	256/135	1107,821	-t-3q+3ok	(kleinere) verminderte Oktave
Fis-f	256/135	1107,821	-t-3q+3ok	(kleinere) verminderte Oktave
G-ges	256/135	1107,821	-t-3q+3ok	(kleinere) verminderte Oktave
Ais-a	256/135	1107,821	-t-3q+3ok	(kleinere) verminderte Oktave
[C]-[H]	243/128	1109,775	5q-2ok	pythagoreische große Septime
[Des*]-[c]	243/128	1109,775	5q-2ok	pythagoreische große Septime
[D]-[cis]	243/128	1109,775	5q-2ok	pythagoreische große Septime
[Es]-[d]	243/128	1109,775	5q-2ok	pythagoreische große Septime
[E]-[dis*]	243/128	1109,775	5q-2ok	pythagoreische große Septime
[F]-[e]	243/128	1109,775	5q-2ok	pythagoreische große Septime
[Ges*]-[f]	243/128	1109,775	5q-2ok	pythagoreische große Septime
[G]-[fis]	243/128	1109,775	5q-2ok	pythagoreische große Septime
[As*]-[g]	243/128	1109,775	5q-2ok	pythagoreische große Septime
[A]-[gis]	243/128	1109,775	5q-2ok	pythagoreische große Septime
[B]-[a]	243/128	1109,775	5q-2ok	pythagoreische große Septime
[H]-[ais*]	243/128	1109,775	5q-2ok	pythagoreische große Septime
(Cis)-(c)	(32/25)w	1123,951	-7mq+5ok	mitteltönig verminderte Oktave
(D)-(des*)	(32/25)w	1123,951	-7mq+5ok	mitteltönig verminderte Oktave
(Dis*)-(d)	(32/25)w	1123,951	-7mq+5ok	mitteltönig verminderte Oktave
(E)-(es)	(32/25)w	1123,951	-7mq+5ok	mitteltönig verminderte Oktave
(Fis)-(f)	(32/25)w	1123,951	-7mq+5ok	mitteltönig verminderte Oktave
(G)-(ges*)	(32/25)w	1123,951	-7mq+5ok	mitteltönig verminderte Oktave
(Gis)-(g)	(32/25)w	1123,951	-7mq+5ok	mitteltönig verminderte Oktave
(A)-(as*)	(32/25)w	1123,951	-7mq+5ok	mitteltönig verminderte Oktave
(Ais*)-(a)	(32/25)w	1123,951	-7mq+5ok	mitteltönig verminderte Oktave
(H)-(b)	(32/25)w	1123,951	-7mq+5ok	mitteltönig verminderte Oktave
Dis-d	48/25	1129,328	-2t+q+ok	(größere) verminderte Oktave
E-es	48/25	1129,328	-2t+q+ok	(größere) verminderte Oktave
Gis-g	48/25	1129,328	-2t+q+ok	(größere) verminderte Oktave
A-as	48/25	1129,328	-2t+q+ok	(größere) verminderte Oktave

H-b	48/25	1129,328	-2t+q+ok	(größere) verminderte Oktave
(Des*)-(cis)	125/64	1158,941	12mq-6ok	übermäßige Septime
(Es)-(dis*)	125/64	1158,941	12mq-6ok	übermäßige Septime
Es-dis	125/64	1158,941	3t	übermäßige Septime
(Ges*)-(fis)	125/64	1158,941	12mq-6ok	übermäßige Septime
As-gis	125/64	1158,941	3t	übermäßige Septime
(As*)-(gis)	125/64	1158,941	12mq-6ok	übermäßige Septime
B-ais	125/64	1158,941	3t	übermäßige Septime
(B)-(ais*)	125/64	1158,941	12mq-6ok	übermäßige Septime
[Cis]-[des*]	1048576/531441	1176,540	-12q+8ok	pythagoreische verminderte None (=ok-pyth
[Dis*]-[es]	1048576/531441	1176,540	-12q+8ok	pythagoreische verminderte None (=ok-pyth
[Fis]-[ges*]	1048576/531441	1176,540	-12q+8ok	pythagoreische verminderte None (=ok-pyth
[Gis]-[as*]	1048576/531441	1176,540	-12q+8ok	pythagoreische verminderte None (=ok-pyth
[Ais*]-[b]	1048576/531441	1176,540	-12q+8ok	pythagoreische verminderte None (=ok-pyth
Des-cis	2025/1024	1180,447	2t+4q-2ok	(größere) überm. Septime
Ges-fis	2025/1024	1180,447	2t+4q-2ok	(größere) überm. Septim
C-c	2/1	1200	ok	Oktave

Weiterführende Links:

- Wikipedia: Die reine Stimmung
- Wikipedia: Die mitteltönige Stimmung
- Wikipedia: Die Verwendung der Maßeinheit Cent in der musikalischen Praxis
- Wikipedia: Tonstruktur (mathematische Beschreibung)

- Stimmungssysteme von Adrian Wehlte
  Dort wird das "Moderne Portativ" vorgestellt, das in der Gehörbildung und im Ensemblespiel objektive Intonationsvergleiche ermöglicht.
- Stimmungssysteme von Adrian Wehlte
- Intonation von Reiner Janke
- Vergleich verschiedener wohltemperierter Stimmungen von Balint Dobozi
- Historische Stimmungssysteme

Zur Entdeckung von Andreas Sparschuh Wie stimmte Bach sein Instrument?:

- Keyboard Tuning of Johann Sebastian Bach von John Charles Francis
- Johann Sebastian Bach's tuning von Bradley Lehman
  Lehman verglicht die Bachsche Girlande - ohne Erwähnung des Entdeckers Sparschuh - mit dem **Stein von Rosette**, eine steinerne Stehle mit eine Inschrift auf Altgriechisch, Demotisch und Hieroglyphen, die maßgeblich die Entzifferung der Hyroglyphen ermöglichte.
- *Das Wohltemperirte Clavier Pitch ...* 2005, von John Charles Francis, Switzerland
- *The Tuning Script from Bach's Well Tempered Clavier*,2006, von Daniel Jencka

Literatur:

- **Wilfried Neumaier**: Was ist ein Tonsystem.
  Quellen und Studien zur Musikgeschichte von der Antike bis in die Gegenwart Nr.9
  Verlag Peter Lang. Frankfurth a.M · Bern · New York 1986
- **Bettina Gratzki**: Die reine Intonation im Chorgesang.
  Verlag für systematische Musikwissenschaft GmbH Bonn 1993 mehr ...
- **Hermann von Helmholtz** Die Lehre von den Tonempfindungen
  Verlag Friedrich Vieweg, Braunschweig 1896.
  download (124 MB) Exzerpt ...
- **Ludwig Riemann** Populäre Darstellung der Akustik in Beziehung zur Musik.
  Verlag Friedrich Vieweg, Braunschweig ebenfalls 1896.
- **Ross W. Duffin**: How Equal Temperament Ruined Harmony (And Why You should Care)
  Verlag W.W.Norton&Company, New York · London, 2007 mehr ...