Lektionen der Analysis in Aufgaben
Lösungen

1. Lektion: Geraden in der x-y-Ebene

siehe dazu auch Punktsteigungsform und Zweipunkteform

1. Gib die Gleichungen der Geraden an und prüfe,

ob der Punkt X auf ihr liegt.

Lösung:

Berechne zuerst die Steigung $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (falls $x2 \neq x1$)

der Geraden durch $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$

und berechne aus $y = mx + c$ den y-Abschnitt c

durch Punktprobe oder rechne gleich mit der

Punktsteigungsform: $y= m(x-x_1) + y_1$

(Gerade durch $P(x_1|y_1)$ mit der Steigung m)

a) Die Gerade durch P(6|0) Q(0|3): $y = - \dfrac{1}{2}x + 3$.

X(10|-2) liegt auf der Geraden.

b) Die Gerade durch A(2|2) parallel zur Geraden durch B(0|-1) C(1|1):

$y = 2x - 2$. X(10|20) liegt nicht auf der Geraden, sondern Y(10|18).

c) Die Gerade durch Q(0|3) parallel zur x -Achse: $y = 3$.

d.h. Alle Punkt X(x|y) mit (x beliebig und) $y = 3$ liegen auf der Geraden.

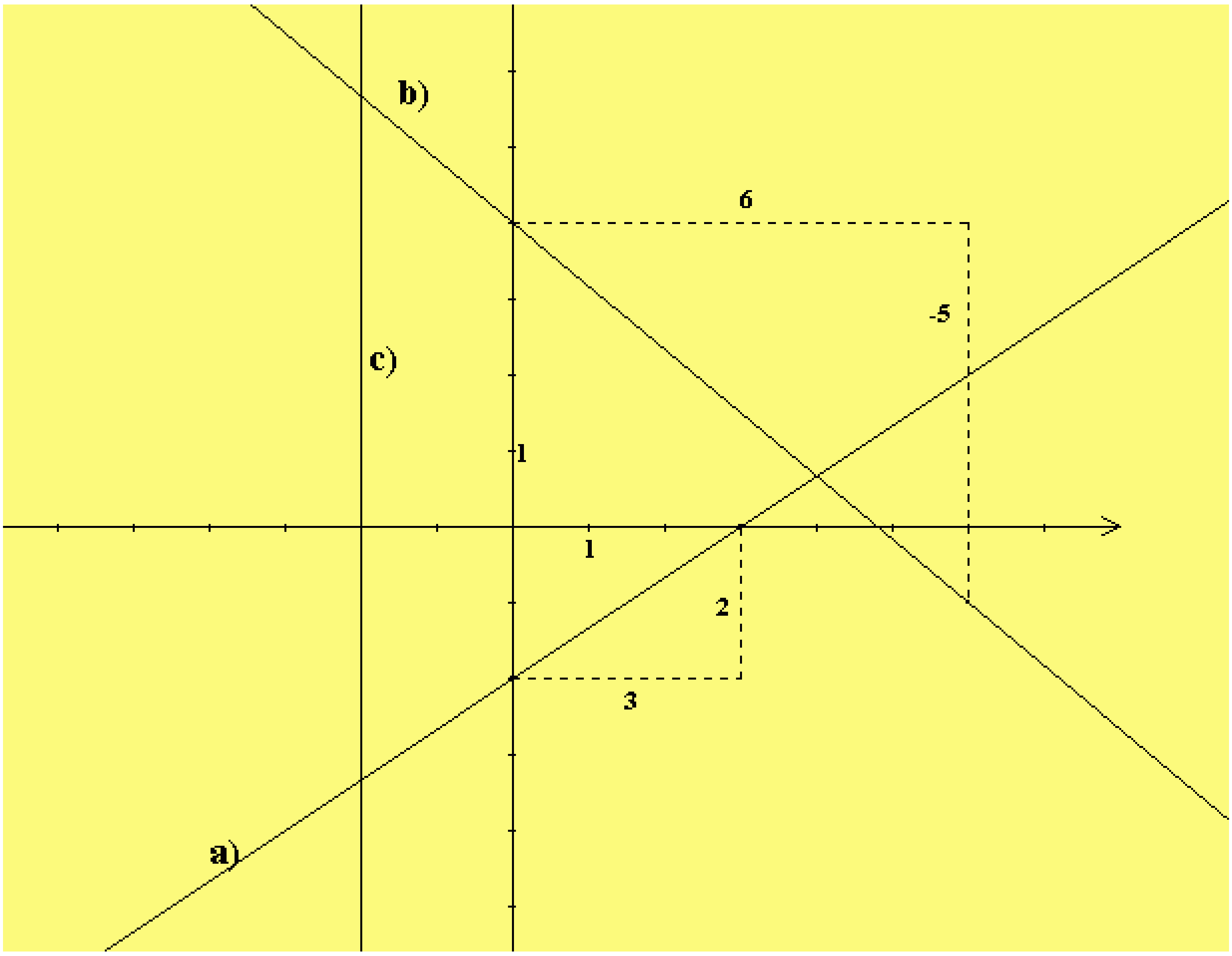
X(11|3) liegt auf der Geraden.

d) Die Gerade durch N(3|0) parallel zur y -Achse: $x = 3$

d.h. Alle Punkt X(x|y) mit (y beliebig und) $x = 3$ liegen auf der Geraden.

X(3|11) liegt auf der geraden.

2. Zeichne bei a) und b) ein Steigungsdreieck aus $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$



10. Lektion: Produkt-, Quotienten- und Kettenregel

Siehe auch: "Kettenregel"!

1 a) $f(x) = 2x^2 \cdot \sin x$ b) $g(t) = \frac{2t^2}{\sin t}$ c) $h(x) = (4 - 5x^2)^3$

Lösungen:

a) $f'(x) = 4x \cdot \sin x + 2x^2 \cos x$

b) $g'(t) = \frac{4t \cdot \sin t - 2t^2 \cos t}{\sin^2 t}$

c) $h'(x) = -30x(4 - 5x^2)^2$

2 a) $f_t(x) = 2t^2 x\sin x$ b) $g_a(t) = \frac{2a^2 t^2}{(a-1)\cos t}$ c) $h_t(x) = (t^2 - t^3 x^2)^3$

Lösungen:

a) $f'_t(x) = 2t^2 \sin x + 2t^2 x\cos x$

b) $$g'_a(t) = \frac{4(a-1)a^2 t\cos t + 2(a-1)a^2 t^2 \sin t}{(a-1)^2 \cos^2 t} = \frac{2a^2(2t\cos t + t^2 \sin t)}{(a-1)\cos^2 t}$$

c) $h'_t(x) = -6t^3 x(t^2 - t^3 x^2)^2$

3. a) $f(x) = \sqrt{2 - 4x}$ b) $g(t) = G - ae^{-kt}$ c) $h(x) = (x-1)e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Lösungen:

a) $f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{2 - 4x}}$

b) $g'(t) = ake^{-kt}$

c) $h'(x) = (-x^2 + x + 1)e^{-\frac{1}{2}x^2}$

11. Lektion: Erst umformen, dann ableiten

Forme erst um und leite dann ab!

Aufabe und Lösung:

a) $$f_t(x) = \frac{t(x^3 - 2x^2 + 3)}{x^2} = t\left(x - 2 + \frac{3}{x^2}\right) \Rightarrow f'_t(x) = t\left(1 - \frac{6}{x^3}\right)$$

b) $$f(x) = \frac{5}{(2x - 1)^2} = 5(2x-1)^{-2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{20}{(2x-1)^3}$$

12. Lektion: Stammfunktionen und Integrale

Ermittle die Stammfunktion! Mache stets die Probe durch Ableiten!

1. a) $f(x) = 5(2x - 4)^5$ b) $g(t) = \frac{1}{2}\cos 2t$ c) $h(t) = 10 - 3e^{-4t}$

Lösung:

a) $F(x) = \frac{5}{12}(2x - 4)^6$ $F'(x) = \frac{5}{12}\cdot 6\cdot 2(2x-4)^5 = f(x)$

b) $G(t) = \frac{1}{4}\sin 2t$ $G'(t) = \frac{1}{4}\cdot(\cos 2t)\cdot 2 = g(t)$

c) $H(t) = 10t + \frac{3}{4}e^{-4t}$ $H'(t) = 10 + \frac{3}{4}\cdot(-4)e^{-4t} = h(t)$

2. a) $f_t(x) = t(tx - t^2)^5$ b) $g_a(t) = a\sin a^2 t$ d) $h(t) = G - ae^{-kt}$

Lösung:

a) $F_t(x) = \frac{1}{6}(tx - t^2)^6$ $F'_t(x) = \frac{1}{6}\cdot 6(tx - t^2)^5\cdot t = f_t(x)$

b) $G_a(t) = -\frac{1}{a}\cos a^2 t$ $G'_a(t) = -\frac{1}{a}(-\sin a^2 t)\cdot a^2 = g_a(t)$

c) $H(t) = Gt + \frac{a}{k}e^{-kt}$ $H'(t) = G + \frac{a}{k}\cdot(-k)e^{-kt} = h(t)$

3. Aufgaben und Lösungen:

a) $$\int_0^{2\pi} \sin\frac{x}{4}\,dx = \left[-4\cos\frac{x}{4}\right]_0^{2\pi} = -4\cos\frac{\pi}{2} + 4\cos 0 = 4$$

b) $$\int_0^{8} \sqrt{2x}\,dx = \left[\frac{1}{3}(2x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{8} = \left\{\frac{1}{2}2x\sqrt{2x}\right)\Big]_0^{8} = \frac{64}{3}$$

c) $$\int_0^{\infty} \frac{1}{(2x+2)^2}\,dx = \lim_{u\to\infty}\left[-\frac{1}{2(2x+2)}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{4}$$

4. Aufgaben und Lösungen

a) $\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t}\,dt = \left[-2e^{-\frac{1}{2}t}\right]_0^x = 2 - 2e^{-\frac{1}{2}x}$

b) $\int_0^x \sin\frac{\pi}{2}t\,dt = \left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}t\right]_0^x = \frac{2}{\pi}\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}x\right)$

c) $\int_0^x f'(2t)\,dt = \left[\frac{1}{2}f(2t)\right]_0^x = \frac{1}{2}(f(2x) - f(0))]$

20. Lektion: Asymptoten

1 a) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{3 - 4x}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x - 1}$

Lösungen:

a) Pol (senkrechte Asymptote) $x = \frac{3}{4}$

Verhalten für $x \to \pm\infty$ (waagrechte Asymptote) $y = -\frac{1}{2}$

b) Pol (senkrechte Asymptote) $x = 0$ (y-Achse)

Verhalten für $x \to \pm\infty$ (schief Asymptote) $y = \frac{1}{2}x - 1$, da $f(x) = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{2x}$

und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - (\frac{1}{2}x - 1) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2x} = 0$

c) Polynomdivision ergibt $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + \frac{1}{4(2x-1)}$

1 1 3

Pol $x = -\frac{}{2}$ schiefe Asymptote $y = -\frac{x}{2} - \frac{}{4}$ (siehe auch Koefizientenvergleich)

2 a) $f(t) = 2 - e^{-0.001t}$ b) $f(x) = \frac{e^x + 3}{2 - e^x}$ c) $f(x) = (1 - 4x)e^{-\frac{1}{2}x}$

Lösungen:

a) Asymptote ist die (positive) x-Achse, da $\lim\limits_{x\to\infty} f(t) = 0$

b) senkrechte Asymptote (Pol) $x = \ln 2$

waagrechte Asymptote (Verhalten für $x\to+\infty$) $y = -1$

waagrechte Asymptote (Verhalten für $x\to-\infty$) $y = \frac{3}{2}$

c) waagrechte Asymptote (Verhalten für $x\to+\infty$) $y = 0$

Beachte: $\lim\limits_{x\to\infty} e^{kx} = 0, \quad \lim\limits_{x\to\infty} xe^{kx} = 0, \quad \lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{kx} = 0, \ldots \ (k < 0)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{kx} = 0, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{kx} = 0, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^{kx} = 0, \ldots \ (k > 0)$

21. Lektion: Symmetrien

Siehe Beispiele im Kapitel "Symmetrien"

22. Lektion: Tangenten und Normalen

1. a) Bestimme die Gleichung der Tangente und Normalen an das

Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - 2x^2 - x + 1$ im Punkt P(1|?)

und berechne deren Schnittpunkte mit den Achsen.

Lösung: $f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x - 1$; $f(1) = -\frac{15}{8}$ $f'(1) = -\frac{9}{2}$ => $P(1|-\frac{15}{8}; -\frac{9}{2})$

b) Dasselbe für $f(x)=\frac{1}{4}(x+1)^2 - \frac{1}{4}$ im Punkt P(2|?)

Lösung: $f'(x) = \frac{1}{}(x-2) + \frac{3}{} = \frac{3}{}x - 1$ $P(2|2;\frac{3}{})$

2 2 2 2

Tangente $y = \frac{3}{2}x - 1$ Achsenabschnitte $A(0|-1)$ $B(0|\frac{2}{3})$

Allgemein: Die Gerade durch $P(x_0|y_0)$ mit der Steigung $m=f'(x_0)$ lautet:

$y=m\cdot(x-x_0)+y_0$ Probe: für $x=x_0$ erhält man $y=y_0$

Tangente: $y = -\frac{9}{2}x + \frac{21}{8}$ Achsenschnittpunkte $N(\frac{7}{12}|0)$ $Q(0|\frac{21}{8})$

Normale: $y = \frac{2}{9}x + \frac{151}{72}$ Achsenschnittpunkte $N(\frac{151}{16}|0)$ $Q(0|\frac{151}{72})$

2. $A(u|v)$ mit $u>0$ sei ein Punkt des Schaubildes K von $f(x) = e^{-x}$. Die Parallele durch A zur x-Achse schneide die y-Achse in B. Die Tangente in A an das Schaubild K schneide die y-Achse in C. Für welchen Wert von u wird der Flächeninhalt des Dreiecks extremal?

Lösung: Tangente in $A(u|e^{-u}); - e^{-u})$: $y = -e^{-u}x + ue^{-u} + e^{-u}$

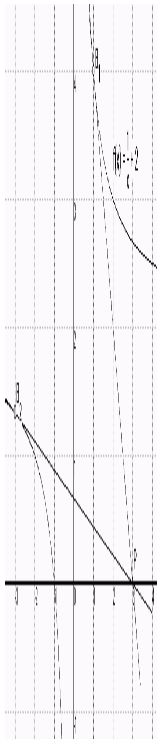
$\Rightarrow C(0|ue^{-u} + e^{-u})$. Flächeninhalt des Dreiecks ABC: $A(u) = \frac{1}{2}u(2-u)e^{-u}$.

Um das Extremum zu bestimmen setzten wir $A'(u) = 0$:

$A'(u) = \frac{1}{2}u(2 - u)e^{-u} = 0$ bei $u = 2$ mit Vorzeichenwechsel von A' vom "+" nach "-". $\Rightarrow$ Relatives Maximum $A(2) = 2e^{-2}$.

Da die Randwerte $\lim_{u\to 0} A(0) = 0$ und $\lim_{u\to\infty} A(u) = 0$ handelt es sich um ein absolutes Maximum.

3. Vom Punkt $P(3|0)$ sollen die Tangenten an das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{x} + 2$ gelegt werden.



Lösung: Sei B(u|f(u)) ein Berührpunkt.

Die Gleichung der Tangente in B ist dann $y = f'(u)(x - u) + f(u)$

Hier: $f(x) = \frac{2}{x} + 2 \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{x^2}$

Tangente in B: $y = -\frac{2}{u^2}(x - u) + \frac{2}{u} + 2$ (*)

Die Tangente soll durch P(3|0) gehen. Mache also in (*) die "Punktprobe"

mit x = 3 und y = 0. Man erhält die Gleichung $-\frac{2}{u^2}(3 - u) + \frac{2}{u} + 2 = 0$

Mit u^2 durchmultipliziert ergibt sich $-2(3 - u) + 2u + 2u^2 = 0$.

Zu lösen ist also die quadratische Gleichung $u^2 + 2u - 3 = 0$

mit den Lösungen $u_1 = 1$ und $u_2 = -3$ mit den Berührpunkten $B_1(1|3)$ und $B_2(-3|\frac{4}{3})$.

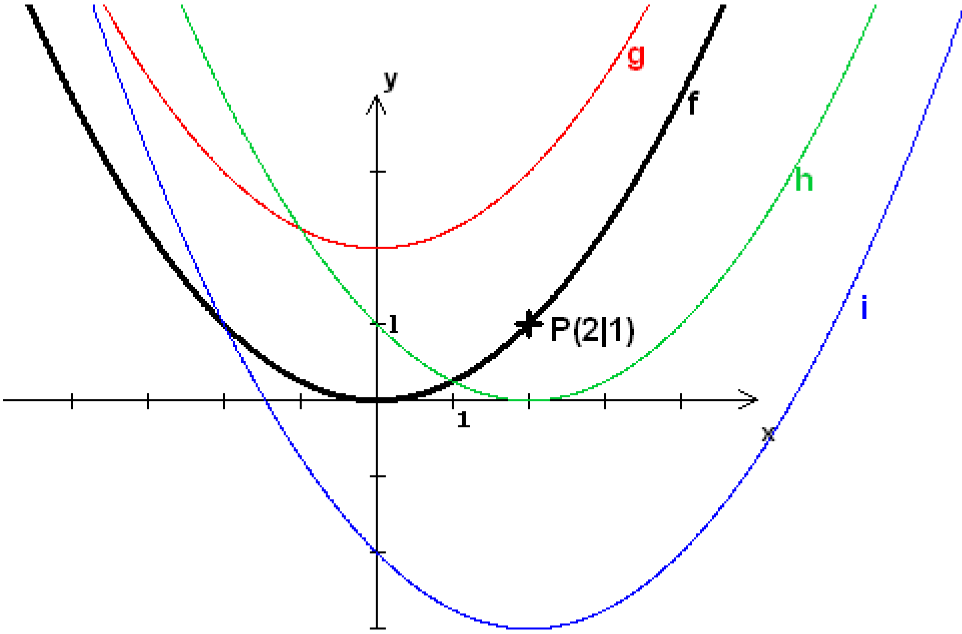
Man kann also von P(3|0) zwei Tangenten an das Schaubild von f legen.

Ihre Gleichungen sind dann $y = -2x + 6$ mit Berührpunkt $B_1(1|3)$ und

$y = -\frac{2}{9}x + \frac{4}{3}$ mit Berührpunkt $B_2(-3|\frac{4}{3})$.

---

23. Lektion: Verschiebung von Schaubildern



a) Bestimme die Gleichung y=f(x) der Parabel durch den Ursprung O(0|0) und P(2|1), die symmetrisch zur y-Achse ist.

b) Die Parabel von Teil a) wird um +2 in Richtung y-Achse verschoben. Bestimme die Gleichung y=g(x).

b) Die Parabel von Teil a) wird um +2 in Richtung y-Achse verschoben. Bestimme die Gleichung y=g(x).

c) Die Parabel von Teil a) wird um +2 in Richtung x-Achse verschoben. Bestimme die Gleichung y=h(x).

d) Die Parabel von Teil a) wird um -3 in Richtung y-Achse und um +2 in Richtung x-Achse verschoben. Bestimme die Gleichung y=i(x).

Lösung:

a) Ist das Schaubild von f eine Parabel, dann ist f von der Form: $f(x)=ax^2 + bx + c$

Hier, wegen der Symmetrie zur y-Achse: $f(x)=ax^2 + c$.

Da die Parabel durch den Ursprung geht, ist f(0)=0, also c=0.

Punktprobe bei $f(x)=ax^2$ mit dem Punkt P(2|1) ergibt $1=a\cdot 2^2$, also a = 1/4

Somit: $f(x) = \frac{1}{4}x^2$

b) $g(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2$ (Im Vergleich zu a) muss zu jedem y-Wert muß 2 addiert)

c) $h(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2$

Probe: $h(1)= \frac{1}{4}(1-2)^2 = \frac{1}{4}(-1)^2 = f(-1)$

$$h(2) = \frac{1}{4}(2-2)^2 = f(0)$$

$$h(3) = \frac{1}{4}(3-2)^2 = f(1)$$

u.s.w.

Man sieht. Bei Punkten vom Schaubild von h muss man x um 2 erhöhen, um denselben y-Wert wie beim Schaubild von f zu erhalten.

Merke: verschiebt man das Schaubild von f um a nach rechts, so erhält man das Schaubild von h mit h(x) = f(x-a).

d) $i(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 3 = \frac{1}{4}x^2 - x + 1$

30. Lektion: Lineares Wachstum

Aufgabe: Lena hat einen Smartphonevetrag (mit einer Telefonflatrate) mit einem monatlichen Basistarif. Jede Minute, die sie im Internet ist, wird jedoch abgerechnet. Im ersten Monat bezahlt Sie für 6 Stunden online 18 € im zweiten Monat für 11 Stunden online 22 €. Im dritten Monat ist sie 15 Stunden online. Wie hoch sind dann die Kosten.

Lösung:

Eine Wachstumsfunktion ist von der Form

$f(x) = m \cdot x + c$ (Hier: x Minuten online, f(x) Preis in Euro)

Bekannt: $f(360) = m \cdot 360 + c = 18$ (1)

$f(660) = m \cdot 660 + c = 22$ (2)

$m \cdot 300 = 4$ (2) - (1)

=> m= 1/75 c=14

Somit: $f(x) = \frac{1}{75}x + \frac{66}{5}$

$f(900) = 25{,}2$

Ergebnis: Im 3. Monat betragen die Kosten 25,2 €.

31. Lektion: Exponentielles Wachstum

Das solltest Du wissen:

Exponentielles Wachstum:

Funktion: $f(x) = A \cdot e^{kx}$ mit $A = f(0)$

Differentialgleichung: $f'(x) = k \cdot f(x)$

Die momentane Änderungsrate ist proportional zum Bestand

1.Aufgabe:

Borgland hatte im Jahr 2008 eine Verschuldung von 60% seines Bruttoinlandsprodukts. Seine Verschuldung wächst jährlich um 11 %. Spätestens bei einer Verschuldung von 150% erklären die Ratingagenturen, dass der Staat die Schulden nicht mehr zurückzahlen kann. Dann gewährt niemand mehr Kredit. Der Staat ist dann bankrott. In welchem Jahr dürfte dieses Ereignis eintreten?

Ansatz: $f(x) = A \cdot e^{kx}$ (x vergangene Jahre seit 2008;

f(x) Verschuldung in Prozent seines Bruttoinlandsprodukts).

Aus $f(0) = 60$ folgt $A = 60$.

Nach einem Jahr hat die Verschuldung um 11% zugenommen, d.h.

$f(1) = A \cdot e^{k} = A + \frac{11}{100}A = A \cdot 1{,}11 \Rightarrow k = 0{,}1044$ (Empfehlung: 4 "geltende Ziffern")

Somit: $f(x) = 60 \cdot e^{0{,}1044x}$

Der Schuldenstand von Borgland ist im Jahre x auf 150 % gestiegen:

$60 \cdot e^{0{,}1044x} = 150 \Rightarrow e^{0{,}1044x} = 2{,}5 \Rightarrow 0{,}1044x = \ln 2{,}5 \Rightarrow x = 8{,}8$ Jahre.

Ergebnis: Borland wird nach dieser Modellrechnung im Jahre 2017 seinen Bankrott erkären.

32. Lektion: Beschränktes Wachstum

Das solltest Du Dir merken!

Funktion: $f(x) = S - c \cdot e^{-kx}$ mit $f(0) = S - c$ (*)

Differentialgleichung: $f'(x) = k \cdot (S - f(x))$ (**)

Die momentane Änderungsrate ist proportional zum "Sättigungsmanko"

(das was bis zur Schranke S noch fehlt).

1. Aufgabe: Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichungen:

a) $f'(x) = 0{,}1\cdot(100 - f(x))$ mit $f(0) = 20$

b) $f'(t) = 20 - 0{,}3\cdot f(t)$ mit $f(0) = 30$

Lösung zu a) Man kann nach (*)und (**) sofort ablesen k = 0,1 und S= 100. Somit

$f(x) = 100 - c\cdot e^{-0{,}1x}$. Mit $f(0) = 100 - c = 20$ folgt $c = 80$

Lösung zu b) Hier müssen wir die Differenzialgleichung erst umformen.

$$f'(t) = 0{,}3\cdot\frac{20}{0.3} - 0{,}3\cdot f(t) = 0{,}3\cdot(66{,}67 - 0{,}3\cdot f(t))$$

Wieder ist sofort ablesbar: $k = 0{,}3$ und $S = 66{,}67$.

Somit ist $f(t)$ $66{,}67 - c\cdot e^{-0{,}3t}$. Mit $f(0)=20$ folgt $c= 46{,}67$

2. Aufgabe: Wird Salz in Wasser gelöst, ist dies bei einer bestimmten Temperatur nur bis zu einer bestimmten Sättigung möglich. Die Geschwindigkeit wie sich das Salz löst, ist proportional zur Restmenge des noch lösbaren Salzes.

a)Bestimmen Sie die Funktion t-> m(t) (t: Zeit in Stunden, m(t) = Prozent der maximal lösbaren Salzmenge) bei einem Proportionalitätsfaktor von k = 3.

b) Wann sind 50% der Sättigung erreicht, falls am Anfang noch kein Salz gelöst ist.

Ansatz: $f(t) = S - c\cdot e^{-kt}$

$$f'(t) = 3\cdot(100 - f(t))$$

Also ist $S= 100$ und $k = 3$.

$f(t) = 100 - c\cdot e^{-3t}$.

Setzt man noch $f(0) = 0$ voraus:

$f(t) = 100 - 100\cdot e^{-3t}$

b) $f(t) = 100 - 100\cdot e^{-3t} = 50$

$\Rightarrow 100\cdot e^{-3t} = 50$, $e^{-3t} = 0{,}5$, $-3t = \ln 0{,}5$, also $t=0{,}231$ Stunden ~ 14 Minuten

3. Aufgabe: In einer Stadt gibt es 40000 Haushalte, von denen schätzungsweise jeder fünfte für den Kauf eines neu auf den Markt gebrachten Haushaltsartikels in Frage kommt. Es ist damit zu rechnen, dass der Absatz des Artikels im Laufe der Zeit schwieriger wird, da der Kreis der Käufer und deren Kauflust abnimmt. In den ersten drei Monaten werden 1700 Stück des Artikels verkauft.

Kann der Hersteller davon ausgehen, dass innerhalb des ersten Jahres wenigstens 5500 Stück verkauft werden?

Lösung: Sättigungsgrenze S=8000

$f(t)=8000-8000\cdot e^{-kt}$

$f(3)=8000(1-e^{-3k})=17000 \Rightarrow k=0{,}07963$

Verkauf nach einem Jahr: f(12) = 4923. Hoffnung des Händlers zu optimistisch.

4. Aufgabe:
Pegelstand in einem Wasserreservoir:
t->V(t) Volumen des Wassers (t in Minuten, V(t) in Kubikmeter)

bekannt: V(0)=20

Zufluss: 0,15 m^3 pro Minute

Abfluss: 0,25% des Inhalts pro Minute.

Bestimme die Funktion t -> V(t)

Lösung: $V'(t)=0{,}15-0{,}0025\cdot V(t)$

Das ist die DGL des beschränkte Wachstums,

Umformung ergibt: $v'(t) = 0{,}0025\cdot(60 - V(t)$

Also ist: $V(t)=60-a\cdot e^{-0{,}0025\cdot t}$

Mit V(0)=20 ergibt sich $V(t)=60-40\cdot e^{-0{,}0025\cdot t}$

33. Lektion: Logistisches Wachstum

Das solltest Du Dir merken!

Funktion: $f(x) = \dfrac{S}{1 + a\cdot e^{-kx}}$ (*)

Differentialgleichung: $f'(x) = \dfrac{k}{S}\cdot f(x)\cdot(S - f(x))$ (**)

Die momentane Änderungsrate ist proportional zum Produkt

von f(x) und (S-f(x)) (dem "Sättigungsmanko").

1. Aufgabe: Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichungen:

$f'(x) = 0{,}1\cdot f(x)\cdot(100 - f(x))$ mit $f(0) = 50$

Lösung Man kann nach (*) und (**) sofort ablesen:

$$\frac{k}{S} = 0{,}1 \text{ und } S = 100 \Rightarrow k=10$$

$$f(x) = \frac{100}{1 + a\cdot e^{-10x}} \text{ mit } f(0)=50 \text{ folgt } a=1.$$

2. Aufgabe: Ein Bakterienkultur auf einer begrenzten Fläche (Nährboden) wächst proportional zum Produkt des Bestandes und dem Sättigungsmanko. Bei Messung pro Stunde ist der Proportionalitätsfaktor 0,01. Am Anfang ist 1% befallen. Wann sind 99% befallen?

Lösung: Für die Funktion t->f(t) (t ind Stunden, f(t) in % der Fläche) gilt dann $f'(t)=0{,}001\cdot f(t)\cdot(100 - f(t))$.

Von dieser Differentialgleichung (logistisches Wachstum) kennen wir die Lösung

$$f(t) = \frac{S}{1 + a\cdot e^{-kt}}, \text{ wobei } S=100,\ \frac{k}{S} = 0{,}001 \text{ und } f(0) = 1. \text{ Also ist}$$

$$f(t) = \frac{100}{1+99\cdot e^{-0{,}1t}}. \text{ Wann ist } f(t) = 99\ ?$$

$$\frac{100}{1+99\cdot e^{-0{,}1t}} = 99 \Rightarrow 99\cdot e^{-0{,}1t} = \frac{1}{99} \Rightarrow -0{,}1t = \ln \frac{1}{99^2} \Rightarrow t=92$$

Ergebnis: Nach rund 92 Stunden sind 99% der Fläche befallen.