

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Seien stets $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Aufgabe 1

Auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$ sei $\mu_z : \mathcal{B}^1 \rightarrow [0, \infty]$ das Zählmaß, definiert durch

$$\mu_z(B) = \begin{cases} |B| & B \text{ endlich} \\ \infty & B \text{ unendlich} \end{cases}$$

Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine diskrete Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsfunktion f . Man beweise, dass f eine μ_z Dichte von $\mathbb{P}_X$ ist. ($\mathbb{P}_X$ ist das Bildmaß von $\mathbb{P}$ bezüglich X).

Aufgabe 2

Sei Ω abzählbar und $\mathcal{E} := \{\{\omega\} \mid \omega \in \Omega\}$.

- (a) Man zeige, dass $\mathcal{E}$ $\cap$ -stabil ist.
- (b) Man bestimme $\sigma(\mathcal{E})$.

Aufgabe 3

Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine diskrete Zufallsvariable, $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$, $I \subset \mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$. Man zeige

$$\mathbb{P}_X = \mathbb{Q} \iff \forall i \in I : \mathbb{P}_X(\{x_i\}) = \mathbb{Q}(\{x_i\}).$$

Aufgabe 4

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, λ^1 -integrierbar und $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $F(x) := \int_{-\infty}^x f(t) dt$. Man zeige, dass F stetig ist und schließe daraus, dass δ_0 keine λ^1 -Dichte besitzt.

Aufgabe 5

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum.

- (a) Sei
 - $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Maßen auf $(\Omega, \mathcal{A})$
 - $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge von Zahlen, $a_n \geq 0$
 - $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen $A_n \in \mathcal{A}$.

Man zeige: Durch $\mu(A) := \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A \cap A_n)$ wird ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert.

(b) Sei μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und $\Omega \subset \Omega_1$. Man zeige, dass

$$\mathcal{A}_1 = \{A_1 \subset \Omega_1 \mid A_1 \cap \Omega \in \mathcal{A}\}$$

eine σ -Algebra ist und dass durch $\mu_1(A_1) := \mu(A_1 \cap \Omega)$ ein Maß auf $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ definiert ist.

(c) Sei $\emptyset \neq B \subset \Omega$. Dann ist $\mathcal{A}|B := \{B \cap A \mid A \in \mathcal{A}\}$ eine σ -Algebra (die Spur von $\mathcal{A}$ in B).

Aufgabe 6

Betrachte auf $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ die σ -Algebra

$$\overline{\mathcal{B}}^1 := \sigma(\mathcal{B}^1, \{\infty\}, \{-\infty\}).$$

Man zeige

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{B}}^1 &= \left\{ B, B \cup \{\infty\}, B \cup \{-\infty\}, B \cup \{\infty, -\infty\} \mid B \in \mathcal{B}^1 \right\} \\ \overline{\mathcal{B}}^1|_{\mathbb{R}} &= \mathcal{B}^1. \end{aligned}$$

Aufgabe 7

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum, $T : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ eine Abbildung. Man zeige:

- (a) $\mathcal{B}_T := \{B \subset \mathcal{X} \mid T^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ ist eine σ -Algebra.
- (b) T ist $\mathcal{A} - \mathcal{B}_T$ messbar.
- (c) Im Falle $\{\omega\} \in T^{-1}(\mathcal{B}_T)$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt sogar $T^{-1}(\mathcal{B}_T) = \mathcal{A}$.

Aufgabe 8

Für $x \in \mathbb{R}$ sei $\mathcal{B}_x^1 := \{B \in \mathcal{B}^1 \mid x + B \in \mathcal{B}^1\}$ wobei $x + B := \{y \in \mathbb{R} \mid \exists b \in B : y = x + b\}$. Man zeige:

- (a) $\mathcal{B}_x^1 = \mathcal{B}^1$
- (b) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $\lambda_x : \mathcal{B}^1 \rightarrow [0, \infty]$, $\lambda_x(B) := \lambda(B)$ ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$.
- (c) Man zeige $\forall x \in \mathbb{R} \forall B \in \mathcal{B} : \lambda(x + B) = \lambda(B)$.

Aufgabe 9

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\Omega_0 \in \mathcal{A}$ fest. Weiter sei $f : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ $\mathcal{A}$ -messbar. Sei μ_0 über $(\Omega_0, \mathcal{A}_0)$, $\mathcal{A}_0 := \{A \in \mathcal{A} : A \subset \Omega_0\}$ die Einschränkung von μ auf Ω_0 , d.h. $\mu_0(B) = \mu(B)$ für alle $B \in \mathcal{A}_0$. Entsprechend sei f_0 die Einschränkung von f auf Ω_0 . Man zeige

$$\int_{\Omega_0} f d\mu = \int f_0 d\mu_0.$$

Aufgabe 10

Seien $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ und Ω_3 gegeben, sowie $x \in \Omega_1$. Für eine Menge $A \subset \Omega$ heißt $A_x := \{\omega_2 \in \Omega_2 \mid (x, \omega_2) \in A\}$ der x -Schnitt von A . Für eine beliebige Abbildung $f : \Omega \rightarrow \Omega_3$ heißt $f_x := f(x, \cdot) : \Omega_2 \rightarrow \Omega_3$ der x -Schnitt von f . Entsprechend sind y -Schnitte definiert für $y \in \Omega_2$. Man zeige:

- (a) $(1_A)_x = 1_{A_x}$, $A_x = (\text{id}_x)^{-1}(A)$, $f_x = f \circ \text{id}_x$.
- (b) $\Omega_x = \Omega_2$, $\emptyset_x = \emptyset$, $(\cup_i A_i)_x = \cup_i (A_i)_x$, $(\cap_i A_i)_x = \cap_i (A_i)_x$, $(A \setminus B)_x = A_x \setminus B_x$.

Aufgabe 11 (Forts. Aufgabe 10)

Seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2, 3$ Messräume und $x \in \Omega_1$. Man zeige mit Aufgabe 10

- (a) Für $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ gilt $A_x \in \mathcal{A}_2$.
- (b) Sei $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \Omega_3$ messbar. Dann ist $f_x : \mathcal{A}_2 \rightarrow \Omega_3$ messbar.

Hinweis zu (a): Man zeige $\{A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \mid A_x \in \mathcal{A}_2\}$ ist eine σ -Algebra über $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Aufgabe 12

Man beweise Satz 2.6.3.

Aufgabe 13

Sei $H \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperebene, also $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c_0 + \langle x, c \rangle\}$ für ein $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und ein $c_0 \in \mathbb{R}$. Man zeige: $\lambda^n = 0$.

Aufgabe 14

Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Zufallsvariable mit λ^n -Dichte $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $X(\Omega) \subset U$ für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und ein $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus $\varphi : U \rightarrow V$, $V \subset \mathbb{R}^n$.

- (a) Man beweise, dass $f|_{U^c} = 0$ f.s.
- (b) Sei $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(y) := \begin{cases} f(\varphi^{-1}(y)) |\det D\varphi^{-1}(y)| & y \in V \\ 0 & y \notin V \end{cases}$$

Man zeige, dass g eine Dichte von $Y := \varphi(X)$ ist. (Hinweis: Transformationsformel für Lebesgue-integrierbare Funktionen).

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Aufgabe 15

Es sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, \mathbb{P})$ ein W-Maß mit stetiger Verteilungsfunktion. Dann gibt es zu jedem $a \in [0, 1]$ ein $B \in \mathcal{B}^1$ mit $\mathbb{P}(B) = a$.

Aufgabe 16

Das Ergebnis eines Roulette-Spieles ist eine der Zahlen 1 bis 36 oder die 0, die alle mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Man kann bei einfacher Gewinnchance auf die geraden Zahlen (2, 4, ..., 36, „Pair“) oder die ungeraden (1, 3, 5, ..., 35, „Impair“) setzen. Ein Spieler setze immer auf „Pair“.

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er bei 10 (unabhängigen) Spielen genau 2-mal bzw. 3-mal Erfolg hat ?
- (b) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit p_k dafür, dass der Spieler beim k -ten Spiel ($k \in \mathbb{N}$) zum ersten Erfolg kommt, und berechne diese Wahrscheinlichkeit für $k = 1, 2, 3$ bzw. $k = 10$.
- (c) Das Einsatzlimit betrage 5000 Euro. Der Spieler beginnt mit einem Einsatz von 5 Euro und nimmt sich vor, bei Verlust seinen Einsatz im jeweils nächsten Spiel zu verdoppeln und bei Gewinn aufzuhören. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er wegen Überschreitung des Limits aufhören muss, bevor er einen Gewinn realisieren kann?

Aufgabe 17

Bei einer Jahrmarktslotterie kann man auf eine der Zahlen 1, 2, ..., 6 setzen. Falls beim Wurf dreier Würfel die gewählte Zahl genau k -mal erscheint ($k = 1, 2, 3$), so darf man seinen Einsatz behalten und erhält zusätzlich das k -fache seines Einsatzes. Erscheint die gewählte Zahl nicht, so ist der Einsatz verloren. Man berechne Erwartungswert und Varianz des Gewinns.

Aufgabe 18

Ein Student, der keine Zeit hat, sich auf einen 20-Fragen-Multiple-Choice-Test vorzubereiten, beschließt, bei jeder Frage aufs Geratewohl zu raten. Dabei besitzt jede Frage fünf Antwortmöglichkeiten, von der genau eine richtig ist.

- (a) Welche Verteilung hat die Zufallsvariable, die die Anzahl der richtigen Antworten angibt? Wieviele Fragen wird der Student im Mittel richtig beantworten?
- (b) Der Test gilt als bestanden, wenn zehn Fragen richtig beantwortet sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Studenten, den Test zu bestehen? Wo müsste die Grenze liegen, wenn die Chance des Studenten, die Klausur durch Raten zu bestehen, größer als 5 % sein soll?

Aufgabe 19

Ein Großhändler versorgt acht Geschäfte, von denen jedes eine Bestellung für den nächsten Tag unabhängig vom anderen Geschäft mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.3$ aufgibt.

- (a) Wie viele Bestellungen laufen mit größter Wahrscheinlichkeit ein?
- (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Zahl der Bestellungen um höchstens eine vom wahrscheinlichsten Wert ab?
- (c) Der Großhändler kann an einem Tag nicht mehr als sechs Geschäfte pünktlich beliefern. Die anderen Geschäfte erhalten die Lieferung verspätet.
 - (i) Wie wahrscheinlich ist es, dass nicht alle Geschäfte pünktlich beliefert werden können?
 - (ii) Wieviele Geschäfte erhalten die Lieferung im Schnitt zu spät?

Aufgabe 20

Eine Teetrinkerin behauptet schmecken zu können, ob der Tee beim Eingießen auf die Milch gegeben wurde oder umgekehrt. Sie erklärt sich auch zu einem Experiment bereit. Eine Person füllt zehn Tassen mit Milch und Tee. Bei jeder Tasse entscheidet sie rein zufällig, ob zuerst die Milch oder zuerst der Tee in die Tasse gegeben wird. Nachdem alle Tassen gefüllt sind, wird die Teetrinkerin ins Zimmer gelassen und darf probieren. Nehmen Sie an, sie rät nur und tippt bei jeder Tasse (jeweils unabhängig von den anderen) mit Wahrscheinlichkeit 0.5 auf die richtige Reihenfolge von Tee und Milch. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass sie mindestens achtmal richtig tippt?

Aufgabe 21

Eine diskrete Zufallsvariable X nimmt nur die Werte 0, 1 oder 2 an. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x) = P(X = x)$ von X hängt von einem Parameter $\theta \in [0, 1]$ ab.

$$\mathbb{P}(X = 0) = 0.36, \quad \mathbb{P}(X = 1) = 0.64 \cdot \theta, \quad \mathbb{P}(X = 2) = 0.64 \cdot (1 - \theta).$$

Für welchen Wert von θ ist X binomialverteilt?

Aufgabe 22

Sei X eine Zufallsvariable mit einer stetigen Verteilungsfunktion F der Form

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -2 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{8}x & \text{für } -2 < x < 0 \\ c_1 + c_2(1 - e^{-x}) & \text{für } 0 < x \end{cases}$$

- (a) Man bestimme die Konstanten c_1 und c_2 .
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X einen Wert größer -1 annimmt?

Aufgabe 23

Die *Standard Log-Normal*(τ)-Verteilung, $\tau > 0$ ist gegeben durch die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} \varphi\left(\frac{\ln x}{\tau}\right) & x > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

wobei φ die Dichte von $N(0, 1)$ ist.

- (a) Man zeige, dass f eine Dichte ist.
- (b) Man gebe die zugehörige Verteilungsfunktion F als Funktion der Verteilungsfunktion Φ der $N(0, 1)$ -Verteilung an.
- (c) Man berechne den Median von F , d.h. diejenige Stelle $\tilde{x}$ mit $F(\tilde{x}) = 1/2$.

Aufgabe 24

Eine stetige Zufallsvariable X habe Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{für } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Überprüfen Sie, ob die Dichte wirklich die Eigenschaft hat:

$$\int f(x) dx = 1.$$

- (b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F , und skizzieren Sie deren Verlauf.
- (c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(|X| \leq 0.5)$.

Aufgabe 25

Sei X eine stetige Zufallsvariable, für die

$$\mathbb{P}(X \geq x) = \begin{cases} x^{-4} & \text{für } x \geq 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt.

- (a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X .
- (b) Berechnen Sie die Dichte f von X .
- (c) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X .

Aufgabe 26

Für eine stetige Zufallsvariable X gilt:

$$f(x) = \begin{cases} 4ax & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ -ax + 0.5 & \text{für } 1 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie den Parameter a so, dass f eine Dichtefunktion von X ist. Ermitteln und skizzieren Sie die zugehörige Verteilungsfunktion. Berechnen Sie den Erwartungswert sowie die Varianz von X .

Aufgabe 27

Von einer stetigen Zufallsvariablen X , die von einem Parameter θ abhängt, sei die Verteilungsfunktion gegeben

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -2 \\ \frac{1}{4}(x+2) + \frac{1}{8}\theta(x^2-4) & \text{für } -2 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

- (a) Wie lautet die Dichte f von X ?
- (b) Welche spezielle Verteilung liegt für $\theta = 0$ vor?
- (c) Berechnen Sie den Erwartungswert von X in Abhängigkeit von θ .

Aufgabe 28

Aus Erfahrung weiß man, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Digitalcomputer eines bestimmten Typus während 12 Stunden kein Fehler auftritt, 0.7788 beträgt.

- (a) Welche Verteilung eignet sich zur näherungsweisen Beschreibung der Zufallsvariable X = Anzahl der Fehler, die während 12 Stunden auftreten?
- (b) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass während 12 Stunden mindestens zwei Fehler auftreten.
- (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei vier (voneinander unabhängigen) Digitalcomputern desselben Typus während 12 Stunden insgesamt genau ein Fehler auftritt?

Aufgabe 29

In FH Rosenheim ist der einzige Fotokopierer im 2. Stock ausgefallen. Über die Zeit X (in Stunden), die ein Techniker benötigt, um den Fotokopierer zu reparieren, ist bekannt, dass diese einer Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda = 3$ folgt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Techniker

- (a) höchstens eine Viertelstunde, (b) zwischen 0.5 und 0.75 Stunden
 - (c) mehr als 1 Stunde
- für die Reparatur benötigt.

Aufgabe 30

Ein Seil der Länge L werde einer (zu großen) Zugkraft ausgesetzt. Für jede Stelle $x \in (0, L)$ des Seiles sei die Wahrscheinlichkeit, dass das Seil im Bereich $x \pm dx$ reißt, proportional zum kürzesten Abstand von einem Seilende. Man formuliere ein Wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell für die beschriebene Situation und berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man nach dem Riss noch ein Seilstück hat, das länger als $0,75 L$ ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Seilstücke die Länge $L/2$ besitzen?

Aufgabe 31

Die Länge X eines Telefongesprächs sei eine Zufallsvariable mit einer Dichte $f(x) = xe^{-x}1_{[0,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Die Kosten C eines Anrufs der Länge x seien $C(x) = 2 - l_{(0,3]}(x) + (2 + 6(x - 3))1_{(3,\infty)}(x)$. Wie teuer ist durchschnittlich ein Telefongespräch?

Aufgabe 32

Das Intervall $[0, 1]$ werde durch eine $U[0, 1]$ -verteilte Zufallsvariable U in zwei Teile geteilt. Man berechne

- (a) den Erwartungswert der Länge des rechten Teilstückes
- (b) den Erwartungswert der Länge des kürzeren Teilstückes.

Aufgabe 33

Zwei Freunde verabreden ein Treffen. Beide wollen unabhängig voneinander zwischen 19 und 20 Uhr am Treffpunkt erscheinen und dort genau 10 Minuten warten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich treffen?

Aufgabe 33 (')

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig.

- (a) Man bestimme die Verteilungsfunktion von $X := \max(X_1, \dots, X_n)$ und $Y := \min(X_1, \dots, X_n)$.
- (b) Angenommen die X_i , $i = 1, \dots, n$ sind iid $U[0, \vartheta]$, $\vartheta > 0$ verteilt. Man bestimme Varianz und Erwartungswert von X und Y .

Aufgabe 34

Für eine beliebige Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zeige man mit dem Satz von Fubini die Identität

$$\forall a \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} (F(x+a) - F(x)) dx = F(a).$$

Aufgabe 35

Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Zufallsvariable für die $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{V}(X)$ existieren. Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Man zeige:

- (a) $\mathbb{E}(AX + b) = A\mathbb{E}(X) + b$
- (b) $\mathbb{V}(AX + b) = A\mathbb{V}(X)A^T$.

Aufgabe 36

Man berechne die momenterzeugende Funktion einer normalverteilten Zufallsvariable X .

Aufgabe 37

Man bestimme die momenterzeugende Funktion von $NB(m, p)$. Hierzu zeige man zunächst

$$\frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{k} x^k, \quad |x| < 1.$$

Aufgabe 38

Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsfunktion f und Verteilungsfunktion F . Sei ferner der geordnete Wertebereich von X gleich $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?

- (a) Unter Umständen kann $f(x_i) < 0$ sein.
- (b) $F(x) = \sum_{x_i < x} f(x_i)$.
- (c) $\mathbb{P}(X > x) = 1 - F(x)$.
- (d) $\sum_{x_i} F(x_i) = 1$
- (e) Ist $x_i < x_j$ so ist $F(x_i) \leq F(x_j)$.
- (f) $f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$ für $i = 2, \dots, n$.
- (g) $f(x_i) < F(x_i)$ für alle $i = 1, \dots, n$.
- (h) $f(x_1) = F(x_1)$.

Aufgabe 39

Welche Verteilungen besitzen die folgenden Zufallsvariablen:

- (a) Die Anzahl der Richtigen beim Fußballtoto, wenn alle Spiele wegen unbespielbarem Platz ausfallen und die Ergebnisse per Los ermittelt werden (X_1 : 1 = Heimsieg, 0 = unentschieden, 2 = Sieg Gastmannschaft, insgesamt 11 Spiele)
- (b) Die Anzahl von Telefonanrufen in einer Auskunftstelle während einer Stunde (X_2).
- (c) Die Anzahl der Studenten, die den Unterschied zwischen der Binomial- und der Poisson- Verteilung verstanden haben, unter 10 zufällig ausgewählten Studenten einer FH (X_3).
- (d) Die Stückzahl eines selten gebrauchten Produkts, das bei einer Lieferfirma an einem Tag nachgefragt wird (X_4).

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Aufgabe 40

Eine Maschine produziert Stifte der Soll-Länge 35 mm. Zufallsbedingte Ungenauigkeiten (also nicht systematische!!) sind nicht auszuschließen. Die Zufallsvariable X = „Länge eines Stifts“ sei $N(35; 0.5)$ -verteilt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig aus der Produktion entnommener Stift

- (a) höchstens 36 mm lang ist.
- (b) mindestens 34 mm lang ist.
- (c) maximal um 0.9 mm von der Soll-Länge abweicht.

Aufgabe 41

In einer Klinik wird eine Studie zum Gesundheitszustand von Frühgeburten durchgeführt. Das Geburtsgewicht X eines in der 28-ten Schwangerschaftswoche geborenen Kindes wird als normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 1000 g und Standardabweichung 50 g angenommen.

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein in der 28ten Schwangerschaftswoche geborenes Kind ein Gewicht zwischen 982 und 1050 g hat?
- (b) Geben Sie ein um den Erwartungswert symmetrisches Intervall an, in dem mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % das Geburtsgewicht liegt.

Aufgabe 42

Ein Anleger verfügt zu Jahresbeginn über 200000 Euro. 150000 Euro legt er bei einer Bank an, die ihm eine zufällige Jahresrendite R_1 garantiert, welche gleichverteilt zwischen 6 % und 8 % ist. Mit den restlichen 50000 Euro spekuliert er an der Börse, wobei er von einer $N(8, 2)$ verteilten Jahresrendite R_2 ausgeht.

- (a) Man bestimme den Erwartungswert und die Varianz von R_1 und R_2 .
- (b) Man berechne die Wahrscheinlichkeiten, dass der Anleger an der Börse eine Rendite von 8 %, von mindestens 9 % bzw. zwischen 6 % und 10 % erzielt.
- (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Anleger bei der Bank eine Rendite zwischen 6.5 % und 7.5 % erzielt?
- (d) Man stelle das Jahresendvermögen V als Funktion der Renditen R_1 und R_2 dar und berechne Erwartungswert und Varianz von V .
- (e) Angenommen, die beiden Renditen sind nicht unabhängig, sondern korrelieren mit $\rho = -0.5$.
 - (i) Wie lautet die Kovarianz zwischen R_1 und R_2 ?

- (ii) Wie würden Sie die 200000 Euro aufteilen, um eine minimale Varianz der Gesamtrendite zu erzielen? Wie ändert sich die zu erwartende Rendite?

Aufgabe 43

Sei $X \sim N_n(\mu, \Sigma)$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, $b \in \mathbb{R}^n$. Man zeige, dass gilt: $AX + b \sim N(A\mu + b, A\Sigma A^T)$.

Aufgabe 44

Seien $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$. Man zeige:

- (a) Falls $X = (X_1, X_2)$ 2-dimensional normalverteilt ist gilt:

$$X_1, X_2 \text{ unabhängig} \iff \rho(X_1, X_2) = 0.$$

- (b) X_1, X_2 unabhängig $\implies X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Aufgabe 45

Ziel ist es zu zeigen, dass man in Aufgabe 44 (a) nicht auf die Voraussetzung $(X_1, X_2) \sim N_2(\mu, \Sigma)$ verzichten kann.

Sei $X \sim N(0, 1)$ und $Y : \Omega \longrightarrow \{-1, 1\}$ mit $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{2}$, X, Y unabhängig und $Z := X \cdot Y$. Man zeige:

- (a) $Z \sim N(0, 1)$.
 (b) X, Z sind unkorreliert.
 (c) X, Z sind nicht unabhängig. (Hinweis: Man zeige, dass $X + Z$ keine Dichte λ^1 besitzt.)

Aufgabe 46

Für Parameterwerte $a > 0$, $\lambda > 0$ ist die Gamma-Verteilung definiert worden. Man zeige:

- (a) $X \sim N(0, 1) \implies X^2 \sim \Gamma(1/2, 1/2)$.
 (b) Sind X_1 und X_2 unabhängig mit $X_i \sim \Gamma(a_i, \lambda)$, so folgt $X_1 + X_2 \sim \Gamma(a_1 + a_2, \lambda)$.
 Hinweis: $\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.
 (c) Man schließe $\chi_n^2 = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Aufgabe 47

Wir betrachten folgende Ereignisse bei zweimaligen Wurf eines Würfels:

- A_6 Die Augesumme ist gleich sechs.
- A_7 Die Augesumme ist gleich sieben.
- B Die erste Zahl ist eine Vier

- (a) Sind A_6 und B unabhängig?
- (b) Sind A_7 und B unabhängig?
- (c) Man gebe eine Interpretation für (a) und (b).

Aufgabe 48

Ein Gerät bestehe aus zwei Bauteilen T_1 und T_2 , die in Reihe angeordnet sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Bauteil T_1 bzw. T_2 während einer bestimmten Zeitdauer intakt bleibt, sei p_1 bzw. p_2 . Die Zuverlässigkeit des Systems soll durch das Hinzuschalten gleichartiger Bauteile T'_1 bzw. T'_2 erhöht werden. Dafür kommen zwei Methoden in Frage, die miteinander verglichen werden sollen:



Methode I Zu dem System wird ein identisches System als Reserve parallelgeschaltet

Methode II Zu jedem Bauteil wird ein identisches Bauteil als Reserve parallelgeschaltet

Man vergleiche die beiden Methoden, indem man unter geeigneten Annahmen die Wahrscheinlichkeit P_I bzw. P_{II} dafür berechnet, dass das nach der Methode I bzw. II veränderte Gerät während der festgelegten Zeitdauer intakt bleibt. Bei welcher Methode ist das System sicherer? (Hinweis: A, B, C, D unabhängig $\implies A \cup B$ und $C \cup D$ sind unabhängig)

Aufgabe 49

Seien A, B unabhängige Ereignisse. Beweisen Sie:

- (a) A^c, B^c sind unabhängig.
- (b) A, B^c sind unabhängig.

Aufgabe 50

Greta würfelt mit einem fairen Würfel einmal und sagt ihrem Vater, dass die Zahl mindestens gleich drei ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um eine Sechs handelt?

Aufgabe 51

Josef steht vor der Wahl die Informatik oder die Statistik Vorlesung zu besuchen. Die Wahrscheinlichkeit zu bestehen ist in der Statistik 0,6 und in Informatik 0,8. Josef entscheidet sich für den Besuch einer der Vorlesungen indem er eine faire Münze wirft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er Statistik besteht.

Aufgabe 52

Eine Nachrichtenquelle sendet die Signale a_1, a_2, a_3 mit den Wahrscheinlichkeiten $(p_1, p_2, p_3) = (0.6, 0.3, 0.1)$. Nach Übertragung durch einen gestörten Nachrichtenkanal wird vom Empfänger eines der Signale (b_1, b_2, b_3) empfangen. Für $i, j = 1, 2, 3$ sei p_{ij} die (bedingte) Wahrscheinlichkeit dafür, b_j zu empfangen, wenn a_i gesendet wurde:

$$(p_{ij})_{i,j=1,2,3} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0.0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

- Berechnen für $j = 1, 2, 3$ die Wahrscheinlichkeit q_j , dass bei einer Übertragung das Signal b_j empfangen wird.
- Für $j, k = 1, 2, 3$ berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit r_{jk} dafür, dass das Sendesignal a_k vorliegt, falls b_j empfangen wird.

Aufgabe 53

Sie und ein Freund werfen je einen fairen Würfel. Derjenige der die kleinere Zahl wirft, zahlt dem anderen so viele Euro, wie die Differenz der Augenzahlen beträgt. Die Zufallsvariable X beschreibe Ihren Gewinn, wobei ein negativer Gewinn für Ihren Verlust steht.

- Bestimmen Sie die möglichen Werte von X und deren Eintrittswahrscheinlichkeiten.
- Falls beide die gleiche Zahl würfeln, wird der Vorgang wiederholt, aber die Augenzahlen verdoppeln sich. Würfeln sie wieder die gleiche Zahl ist das Spiel beendet. Geben Sie für dieses modifizierte Spiel die möglichen Werte und deren Eintrittswahrscheinlichkeiten für Ihren Gewinn Y an.

Aufgabe 54

Ein Nachtwächter hat einen Schlüsselbund mit 10 ähnlichen Schlüsseln. Wenn er eine Tür aufschließen will, zu der genau ein Schlüssel passt, hat er zwei Methoden:

- Methode *A* Schlüssel nacheinander ausprobieren, d.h. kein Schlüssel wird zweimal ausprobiert.
- Methode *B* zufällig einen Schlüssel probieren. Passt er nicht, dann Schlüsselbund schütteln und wieder einen Schlüssel zufällig probieren.

- (a) X_A und X_B sei die Anzahl der Versuche, die nach Methode A bzw. B nötig sind um den passenden Schlüssel zu finden. Geben Sie die möglichen Werte von X_A, X_B und deren Wahrscheinlichkeiten an.
- (b) Der Nachtwächter verwendet Methode A wenn er nüchtern ist und B sonst. Die Wahrscheinlichkeit, dass er nüchtern ist betrage $2/3$. Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Betriebsleiter den Nachtwächter der Trunkenheit im Dienst zu unrecht bezichtigt, wenn er gesehen hat, dass dieser schon 8-mal erfolglos versucht hat, die Türe zu öffnen?

Aufgabe 55

Sind die beiden Zufallsvariablen X und Y , die die Augensumme bzw. die Differenz beim Werfen zweier fairer Würfel angeben, unabhängig?

Aufgabe 56

In Aufgabe 54 (a) und (b) bestimmen Sie die erwartete Anzahl der Versuche, die der Nachtwächter benötigt bis er den passenden Schlüssel gefunden hat.

Aufgabe 57

Der Türsteher einer Nobeldiskothek entscheidet sequentiell. Der erste Besucher wird mit der Wahrscheinlichkeit 0.5 eingelassen, der zweite mit 0.6 und der dritte mit 0.8. Man betrachte die Zufallsvariable X : "Anzahl der eingelassenen Besucher unter den ersten beiden Besuchern" und Y : "Anzahl der eingelassenen Besucher unter den letzten beiden Besuchern".

- (a) Man gebe die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion von X und Y an.
- (b) Man untersuche, ob X und Y unabhängig sind.

Aufgabe 58

Gegeben sind zwei diskrete Zufallsvariablen X und Y von deren gemeinsamer Wahrscheinlichkeitsverteilung folgendes bekannt sei:

	y_j			
	-1	0	1	
x_i	1	p	0.1	0.5
	2	0.2		
	0.35			

- (a) Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y)$ und in Abhängigkeit von p den Erwartungswert $\mathbb{E}(XY)$.
- (b) Bestimmen Sie p so, dass X, Y unkorreliert sind.
- (c) Sind X, Y unabhängig?

Aufgabe 59

Seien X, Y unabhängig und Laplace-verteilt über $\{1, \dots, n\}$. Bestimme $\mathbb{E}(\max(X, Y))$.

Aufgabe 60

X und Y seien unabhängig, Poisson verteilt mit Parametern λ_1, λ_2 . Bestimme den bedingten Erwartungswert von X gegeben $X + Y$. Genauer: Man zeige

$$\mathbb{E}(X|X+Y) = (X+Y) \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + \lambda_2)}.$$

Aufgabe 61

Seien X eine Zufallsvariablen, $\mathbb{E}(X)$ existiere. Für eine σ -Algebra $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ sei

$$\text{Var}(X|\mathcal{C}) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X|\mathcal{C}))^2|\mathcal{C}).$$

Man zeige: $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(\text{Var}(X|\mathcal{C}) + \text{Var}(\mathbb{E}(X|\mathcal{C}))$

Aufgabe 62

Gegeben seien zwei Zufallsvariablen Y und N . Dabei sei $Y \sim \Gamma(a, \lambda)$ -verteilt und bei gegebenem $Y = y$ sei $N \sim \text{Poi}(y)$ -verteilt.

- (a) Bestimmen Sie $\mathbb{E}(N)$
- (b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von N .

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Aufgabe 63

Ein Hautarzt möchte sich eine Meinung darüber bilden, welches von zwei neu auf dem Markt angebotenen Hautpflegemitteln A und B wirksamer gegen Ekzeme ist. Dazu gibt er 15 unter Ekzemen leidenden Patienten jeweils ein Fläschchen von A und von B und bittet sie darum, darauf zu achten, welches der Hautpflegemittel die stärkere Wirkung zeigt. Er legt die folgende Entscheidungsregel fest: Wenn mehr als 11 Patienten der Ansicht sind, dass das Mittel A (bzw. B) wirksamer ist als das andere, so wird er davon ausgehen, dass Mittel A (bzw. B) eine stärkere Wirkung hat. Andernfalls wird er A und B als gleich wirksam betrachten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Arzt auf unterschiedliche Wirksamkeit schließt, falls A und B tatsächlich gleich wirksam sind?

Aufgabe 64

Für ein $\theta > 0$ sei $X_1, X_2, \dots$ eine unabhängige Folge $U(0, \theta)$ -verteilter Zufallsvariablen.

- (a) Man zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$T_n((X_1, \dots, X_n)) = \frac{2}{n}(X_1 + \dots + X_n)$$

ein erwartungstreuer Schätzer für den Parameter θ ist.

- (b) Man bestimme die Varianz von T_n

- (c) Man zeige, dass $T_1, T_2, \dots$ eine konsistente Schätzerfolge für θ ist.

Aufgabe 65

Ein Fahrkartenkontrolleur überprüft einen Tag lang die Fahrkarten von Fahrgästen. Er überprüft jeweils solange bis er einen Fahrgast ohne gültigen Fahrschein antrifft. Nach Ausstellung eines Strafprotokolls kassiert er von diesem ein Bußgeld und beginnt nach einer Pause mit einer neuen Überprüfung. Die folgenden Zahlen geben an, wie viele Fahrgäste bei 10 solchen Überprüfungen jeweils überprüft wurden, bis ein Bußgeld fällig wurde:

42 50 40 64 30 36 68 42 46 48.

Beschreibt die Zufallsvariable X die Anzahl der Personen, die überprüft werden, bis ein Fahrgast ohne gültigen Fahrschein angetroffen wird, so kann angenommen werden, dass

$$P_\theta(X = n) = (1 - \theta)^{n-1} \theta$$

gilt, wobei $\theta \in [0, 1]$ als Anteil der Schwarzfahrer unter allen Fahrgästen zu interpretieren ist.

Man bestimme aufgrund obiger Messwerte einen Maximum-Likelihood-Schätzwert für θ .

Aufgabe 66

In einer Stadt liegen für 161 Jahre die Niederschlagsmengen im Monat April vor. Die Messreihe $x_1, \dots, x_{161}$ (x_i = Niederschlagshöhe in mm im i -ten Jahr) hat das arithmetische Mittel $\bar{x} = 53,68$ und die empirische Streuung $s = 6,13$. Es wird angenommen, dass die Werte $x_1, \dots, x_{161}$ eine Realisierung von 161 unabhängigen, identisch $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilten Zufallsvariablen sind. Mit Konfidenzschätzverfahren zum Niveau $1 - \alpha = 0,98$ bestimme man je ein konkretes Schätzintervall

- (a) für μ
- (b) für σ^2
- (c) für μ unter der Voraussetzung $\sigma^2 = 6,13^2$

Aufgabe 67

Bei einer Umfrage unter 3000 Besitzern von PKWs eines weit verbreiteten Typs haben 60 angegeben, dass sie mit der Straßenlage unzufrieden sind. Es sei p der relative Anteil der mit der Straßenlage unzufriedenen in der Gesamtheit aller Besitzer von Fahrzeugen dieses Typs. Ausgehend von geeigneten Verteilungsannahmen konstruiere man ein approximatives Konfidenzintervall für p zum Niveau 0,95, das konkrete Schätzintervalle der Form $[0, p_0]$ liefert, und bestimme p_0 zu den angegebenen Daten.

Aufgabe 68

Das Gewicht von Brötchen (gemessen in g) ist zufallsabhängig. Man nimmt an, dass die Zufallsvariable, die das Gewicht beschreibt, $N(\mu, 36)$ -verteilt ist. Für 81 (zufällig und unabhängig) ausgewählte Brötchen ergab sich das Durchschnittsgewicht zu $\bar{x} = 37g$.

- (a) Man überprüfe mittels eines zweiseitigen Tests, ob das Datenmaterial mit der Hypothese
 H_0 : „Das Durchschnittsgewicht der Brötchen beträgt 38g“
auf dem 5 % Niveau vereinbar ist.
- (b) Sei nun $\mu = 37$ g der tatsächliche Wert von μ . Wie groß ist dann die Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art bei dem in (a) angewendeten Test ?
- (c) Der Test in (a) soll durch Erhöhung des Stichprobenumfanges so abgeändert werden, dass unter Beibehaltung der Hypothese H_0 und der Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art nun für die Alternative
 H_1 : $\mu = 37$ g die Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art kleiner gleich 5 % wird. Wie groß muß der Stichprobenumfang n mindestens gewählt werden, damit dies gewährleistet ist?

Aufgabe 69

Dem Hersteller eines Spülmittels wird von einer Verbraucherorganisation vorgeworfen, 3-kg Packungen in den Handel zu bringen, deren Inhalt wesentlich unter dem Nenngewicht liegt. Die Verbraucherorganisation kauft 21 Packungen und stellt jeweils deren Nettogewicht fest. Dabei ergibt sich ein Stichprobenmittel von $\bar{x} = 2,82$ kg und eine Stichprobenvarianz von $s^2 = 2,82$.

- (a) Welches konkrete Schätzintervall zum Niveau 0.9 für den unbekannten Erwartungswert μ des Nettogewichts pro Packung ergibt sich, wenn man davon ausgehen kann, dass die Nettogewichte durch unabhängige $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariablen beschrieben werden können.
- (b) Der Hersteller begründet das Untersuchungsergebnis mit dem Hinweis auf einen Defekt an der Verpackungsmaschine. Die Maschine sei inzwischen neu eingestellt. Zur Überprüfung dieser Aussage wird ein neuer Test durchgeführt. Die Hypothese $H_0: \mu = 3$ wird gegen $H_1: \mu < 3$ mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1 % und bei einem Stichprobenumfang von $n = 25$ getestet. Die Messergebnisse lieferten ein Stichprobenmittel von $\bar{x} = 2.96$ kg und eine Stichprobenvarianz von $s^2 = 0,01$. Wie lautet das Testergebnis?

Aufgabe 70

In einer Molkerei wurden bei zwei Maschinen, die Milch in Milchtüten abfüllen, die Füllmengen von 21 bzw. 9 Milchtüten bestimmt. Dabei erhielt man Meßwerte $x_1, \dots, x_{21}, y_1, \dots, y_9$ mit den arithmetischen Mitteln $\bar{x} = 501$ bzw. $\bar{y} = 503$ und den empirischen Varianzen $s_{(21)}^2 = 3.24$ bzw. $s_{(9)}^2 = 3,61$. Unter der Annahme, dass die angegebenen Messwerte eine Realisierung unabhängiger Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_{21}, Y_1, \dots, Y_9$ sind, wobei $X_1, \dots, X_{21}$ identisch $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $Y_1, \dots, Y_9$ identisch $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ -verteilt sind, teste man

- (a) unter der Annahme $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, durch Anwendung eines geeigneten Testverfahrens zum Niveau 0,05 die Hypothese $H_0: \mu_1 \geq \mu_2$ gegen die Alternative $\mu_1 < \mu_2$.
- (b) durch Anwendung eines geeigneten Testverfahrens zum Niveau 0,1, ob aufgrund des angegebenen Datenmaterials die unter (a) gemachte Annahme $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ gegen $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ zu verwerfen ist.

Aufgabe 71

Um die Genauigkeit eines neu entwickelten Gerätes zur Messung von Weglängen im Gelände zu kontrollieren, wurde eine Strecke von genau 1000 m zehnmal vermessen. Es ergaben sich die Messwerte

998,0 1001,0 1003,0 1000,5 999,0 997,5 1000,0 999,5 996,0 998,5

Unter der Annahme, dass die Messwerte eine Realisierung unabhängiger $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilter Zufallsvariablen sind, sollen zum Niveau 5 % die Hypothesen getestet werden, dass

- (a) das Gerät im Mittel die korrekte Entfernung angibt,
- (b) die Varianz σ^2 den Wert $\sigma_0^2 = 4$, den herkömmliche Geräte aufweisen, nicht unterschreitet.

Aufgabe 72

Bei Neugeborenen soll untersucht werden, ob die Geburt eines Jungen, die Geburt eines Mädchens und die Geburt von Mehrlingen von der Anzahl der vorangegangenen Geburten der Mutter unabhängig sind. Eine Untersuchung von je 100 Geburten ergab folgende Zahlen:

	Anzahl der vorangeg. Geburten			
	0	1	2	3 oder mehr
Geburt eines Jungen	60	46	50	44
Geburt eines Mädchens	39	54	49	54
Mehrlingsgeburt	1	0	1	2

Man wende den χ^2 -Unabhängigkeitstest zum Niveau $\alpha = 0,05$ an.

Aufgabe 73

Bei einem Kreuzungsversuch erhielt Gregor Mendel 315 runde gelbe Erbsen, 108 runde grüne Erbsen, 101 kantige gelbe Erbsen und 32 kantige grüne Erbsen. Theoretisch sollten sich die vier Zahlen wie $9 : 3 : 3 : 1$ verhalten. Man überprüfe die Theorie anhand der Daten.