

ALGEBRA

## Ein Koffer voller Zahlen

Warum versucht sich jemand an der Konstruktion eines regelmäßigen 65.537-Ecks? Die wundersame Geschichte des Johann Gustav Hermes und seiner mehr als zehn Jahre währenden mathematischen Fleißarbeit

VON Frank Fischer | 16. August 2012 - 08:00 Uhr

Weltweit gehört die Geschichte dieses Koffers heute zu den Ritualen einer Algebravorlesung. Wo auch immer man Mathematik studiert, irgendwann bekommt man die Anekdote in der einen oder anderen Form zu hören. Die Details weichen zwar jeweils ein wenig voneinander ab. Der Kern der Geschichte aber ist stets derselbe:

*Ein eifriger junger Mathematikstudent, der leider nicht genial ist, möchte gegen Ende des 19. Jahrhunderts promovieren. Er wird bei Felix Klein vorstellig, der damals das Mathematische Institut in Göttingen zu einem weltweit führenden Zentrum aufbaut. Professor Klein erkennt sofort die Mittelmäßigkeit des Studenten und gibt ihm – um ihn sich vom Leibe zu halten – eine anscheinend unmöglich zu lösende Aufgabe: Er solle doch bitte die vollständige Konstruktion eines regelmäßigen 65537-Ecks ausarbeiten!*

Die Herausforderung ist ebenso gewaltig wie absurd. »Regelmäßig« bedeutet in diesem Zusammenhang, dass alle Kanten des 65.537-Ecks gleich lang sein müssen, und konstruiert werden soll das Ganze natürlich im Sinne der euklidischen Geometrie, also nur mit Zirkel und Lineal. Dabei war bereits unumstößlich bewiesen, dass diese Konstruktion theoretisch möglich ist. Einen Erkenntnisgewinn würde die Sache also nicht bringen.

*Falls aber der eifrige junge Mann sich daran versuchen wolle, dann sei das mit der Promotion geritzt. Nun vergehen zehn lange Jahre, der Vorfall ist längst vergessen, als der Student sich plötzlich wieder bei Klein meldet. Er präsentiert dem verutzten Professor einen eigens angefertigten Koffer, in dem sich auf Hunderten großformatigen Blättern die Lösung befindet. Und Klein kann nun nicht anders, als ihm den Dokortitel zu verleihen – einen Dr. phil. für eine eindrucksvolle Fleißarbeit.*

**FRANK FISCHER**

ist Autor und Herausgeber des Online-Feuilletons *Der Umblätterer*. Zuletzt erschien von ihm der Band *Weltmüller* (SuKuLTuR Verlag).

Eine hübsche Geschichte. Aber wie es bei Anekdoten so ist: Ein Drittel stimmt, ein Drittel stimmt nicht ganz, und ein Drittel ist falsch. Richtig ist: Den eifrigen jungen Mann gab es wirklich, er hieß Johann Gustav Hermes. Und Felix Klein lehrte seit 1886 als Professor in Göttingen. Selbst der Koffer mit dem gewichtigen Papierstapel existiert. Er wird heute als Kuriosum am Mathematischen Institut in der Göttinger Bunsenstraße aufbewahrt. Der Rest

der Anekdote jedoch ist nach dem Stille-Post-Prinzip falsch überliefert. Zeit, der Sache einmal auf den Grund zu gehen.

Klar ist, dass die Relevanz des Koffers für den Fortschritt der Mathematik gegen null strebt. Denn dass die Konstruktion eines Polygons mit 65.537 Ecken möglich ist, hatte schon Carl Friedrich Gauß nachgewiesen. Das Zeichnen eines regulären n-Ecks entspricht dabei dem Problem der Kreisteilung, das man genau wie die Quadratur des Kreises aus der Antike geerbt hatte. Populär formuliert, lautet die Fragestellung: Wie teile ich eine Torte in n gleich große Teile? Überraschend dabei ist, dass sich nicht alle n-Ecke mit euklidischen Mitteln konstruieren lassen, etwa das 7-Eck oder das 9-Eck. Schon Euklid kannte eine Vielzahl konstruierbarer Polygone, stieß bei einigen n-Ecken allerdings an die Grenzen seiner Methode. Wirklich neue Erkenntnisse auf diesem Gebiet gab es erst über zwei Jahrtausende später.

Im Jahre 1796 erkannte der 18-jährige Gauß – »durch angestrengtes Nachdenken ... am Morgen ... (ehe ich aus dem Bette aufgestanden war)« –, dass die Konstruktion des 17-Ecks möglich ist. Ein echter Geniestreich. In seinen *Disquisitiones Arithmeticae* von 1801 löste Gauß das Problem der konstruierbaren Polygone schließlich generell. Unter anderem stellte er so auch heraus, dass ein regelmäßiges n-Eck mit primärer Eckenzahl größer als 2 genau dann nur mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, wenn n eine Fermatsche Primzahl ist, also eine Primzahl der Form  $(2 \text{ hoch } (2 \text{ hoch } p)) + 1$ .

Von diesen Zahlen, benannt nach dem französischen Mathematiker Pierre de Fermat, sind bis heute nur fünf bekannt. Man erhält sie, wenn man für p die Zahlen 0, 1, 2, 3 und 4 einsetzt. Daraus ergeben sich dann die 3, die 5, die 17, die 257 und die 65537 als Fermatsche Primzahlen. Schon die nächste Zahl, die nach dem genannten Schema gebildet wird, die 4.294.967.297, ist durch 641 teilbar, also keine Primzahl mehr. Bislang ist es trotz Hochleistungscomputern nicht gelungen, weitere Fermatsche Primzahlen zu finden. Bleibt also die 65.537 als bisher größte bekannte.

Drei Jahrzehnte nach Gauß veröffentlichte der Königsberger Mathematiker Friedrich Julius Richelot eine 84 Seiten lange lateinische Abhandlung über die Konstruktion des 257-Ecks. Ein Blick darauf verdeutlicht, dass mit »Konstruktion« nicht etwa das tatsächliche Zeichnen des exorbitanten Vielecks gemeint ist. Es handelt sich auch nicht um einen Algorithmus, der genau vorschreibt, wann welche Mittelsenkrechte und wann welche Winkelhalbierende zu konstruieren sei. Zwar kann man ein 17-Eck, wenn man einen ausreichenden Maßstab wählt und sich sehr gut konzentriert, tatsächlich noch per Hand zeichnen. Bei einem 257-Eck, das für das menschliche Auge schon wie ein Kreis aussieht, ist so eine Konstruktion praktisch nicht mehr durchführbar. Aber Gauß hatte vor Richelot vor allem eines geleistet: die Übersetzung des geometrischen Problems der Kreisteilung in die Algebra. Richelot löste nach Gauß' Vorbild die Kreisteilungsgleichung durch geschachtelte Quadratwurzeln auf, um an deren Lösungen zu gelangen.

Doch dann trat Johann Gustav Hermes auf den Plan. Geboren wurde er am 20. Juni 1846 im ostpreußischen Königsberg, wo er auch studierte; 1870/71 nahm er am Deutsch-Französischen Krieg teil, 1872 legte er sein Staatsexamen in Mathematik ab und ging danach in den Schuldienst. Nebenbei promovierte er 1879 in Königsberg mit einer kleinen, noch recht unverbindlichen Arbeit zum Problem der Kreisteilung. Vielleicht hat er sein Faible für diese Thematik direkt von Richelot geerbt, der Professor in Königsberg war, als Hermes dort studierte. Seine Dissertation hatte jedenfalls noch nichts mit dem Koffer zu tun und auch nicht mit Göttingen, obwohl sich dieses Gerücht hartnäckig hält.

Die Doktorarbeit ist für Hermes jedoch auch nur die Vorarbeit für ein viel abenteuerlicheres Projekt, das er am 4. November 1879 beginnt: sein *Diarium zur Kreisteilung*. Zehn Jahre lang wird er daran arbeiten, in den Mußestunden nach dem täglichen Unterricht am Progymnasium des Königlichen Waisenhauses in Königsberg. Er schreibt und zeichnet großformatige Blätter voll, legt filigrane Tabellen an, gibt Beispielkonstruktionen an und ergeht sich in endlosen Rechnungen und Zahlenkolonnen. 1889 ist er fertig. Die letzte beschriebene Seite trägt die Nummer 221. Er lässt den Papierstoß binden und jenen berühmten Spezialkoffer anfertigen, auf dem mit großen Buchstaben die Kennung »J. Hermes« geschrieben steht.

Was dann genau geschieht, ist nicht ganz klar. Vielleicht versucht Hermes, das Ergebnis seiner zehn Jahre dauernden Bemühungen publik zu machen. Doch auf viel Resonanz stößt er nicht. Die meisten Mathematiker dürften sein Großprojekt als Banalität abgetan haben. So soll sich der große Mathematiker David Hilbert, der wie Hermes aus Königsberg stammt, nur höhnisch über dessen Bemühungen lustig gemacht haben.

Felix Klein ist offenbar der einzige ernsthafte Mathematiker, der sich für Hermes' Problem und den Koffer interessiert. Denn Klein ist damals bekannt dafür, dass er ein besonderes Interesse an der Schulmathematik hat. Vermutlich war er für einen hauptberuflichen Lehrer wie Hermes daher zugänglicher als andere Koryphäen. Verbürgt ist jedenfalls, dass Felix Klein im Frühjahr 1894 an der Göttinger Akademie der Wissenschaften eine von Hermes angefertigte 17-seitige Zusammenfassung des Projekts präsentiert (*»Ueber die Teilung des Kreises in 65.537 gleiche Teile«*), die anschließend auch gedruckt wird. Die Abhandlung, die als Einstieg in die Wunderwelt des *Diariums* gedacht ist, bezieht sich dabei mehrfach auf den Inhalt des Koffers. Diesen hat Hermes damals schon an das Göttinger Institut übergeben, wie er explizit vermerkt.

Dort liegt er heute noch. Gezeigt wird die mathematische Rarität allerdings nur noch in Ausnahmefällen, denn ihr konservatorischer Zustand ist bedenklich. Doch für die *ZEIT* machen die Mathematiker Jörg Brüdern und Thomas Schick eine Ausnahme. Behutsam heben sie das schwere Konvolut aus dem Koffer heraus auf einen Tisch der Institutsbibliothek und wenden respektvoll die Seiten um. Knapp 125 Jahre haben ihre Spuren hinterlassen. Dennoch wirkt das Ganze noch immer äußerst ästhetisch. Ein filigranes Geflecht von Punkten, Linien und Kreisen breitet sich über die Seiten aus,

verziert mit Anmerkungen und Erläuterungen in gut lesbarer Kurrentschrift. Dazu kommt eine Flut von Tabellen, Rechnungen und Koeffizientenschemata, die sich am Ende zu einem Zahlen- und Symbolmix gewaltigen Ausmaßes fügen.

Was hat Hermes da im Einzelnen gemacht? Brüdern und Schick mühen sich redlich, einen Sinn in die Tabellen hineinzulesen – »Das hier sieht so aus, als ob er eine Einheitswurzel konstruiert hat und die nächste konstruieren will. Jetzt sucht er denjenigen Kreis, der hier richtig teilt«. Doch der Großteil der Rechnungen erschließt sich weder auf den ersten noch auf den zweiten oder dritten Blick. »Unser Kollege Benno Artmann hat sich das mal näher angeschaut«, sagt Schick. »Der hätte vielleicht mehr sagen können – aber er ist leider 2010 verstorben.«

Hermes' *Diarium* findet auch keinen glorreichen Abschluss, es mündet nicht in ein triumphales »Heureka!« oder ein »*quod erat demonstrandum*« – es gab ja auch nichts Neues zu vermelden. Auf Seite 221 ist es einfach zu Ende.

Die Reaktion der Fachwelt fällt verhalten aus. Nach Hermes' 17-seitigem Aufsatz von 1894 verzeichnet die Literatur gerade mal eine einzige Rezension in einem Fachjournal; sie stammt von Hermann Minkowski und ist weniger als zweieinhalb Zeilen lang.

Felix Klein erwähnt Hermes 1895 noch einmal etwas ausführlicher in seinen *Vorträgen über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie*. Ansonsten verläuft dessen weiterer Lebensweg eher unaufgeregt. 1893 zieht er vom Osten des Reichs in den Westen um und nimmt eine Stelle als Oberlehrer in Lingen im Emsland an. 1899 wird er Direktor des Königlichen Realgymnasiums in Osnabrück. 1906 lässt er sich aus gesundheitlichen Gründen pensionieren, am 8. Juni 1912 stirbt Hermes in Bad Oeynhausen.

Was ihn zu seinem manisch ausgeführten Lebensprojekt getrieben hat, ist nach wie vor schwer zu erklären. Vielleicht war ihm das 65.537-Eck einfach ein leidenschaftliches Hobby, so wie andere Menschen sich für Balkonpflanzen oder das Sammeln von Briefmarken begeistern? Auf jeden Fall hat Hermes ein eindrucksvolles Beispiel für die Hartnäckigkeit und Zielstrebigkeit des menschlichen Geistes gegeben. Dass ihm das wichtig war, darauf deuten die Schlussworte der Rede hin, die er zum Antritt seiner Direktorenstelle in Osnabrück hielt: »Geduld ist die Pforte der Freude. *On peut tout atteindre, si l'on sait attendre!*« – Man kann alles erreichen, wenn man nur zu warten versteht.

Vollständig nachgerechnet hat Hermes' Kofferkonvolut bisher niemand. Wozu auch? Wenn man wollte, könnte man heute die Konstruktion recht problemlos mit einem Computer programmieren. Doch wer braucht schon ein regelmäßiges 65.537-Eck? Für die Mathematik ist die Sache nicht mehr als eine Fußnote. Und doch erzählt der eng beschriebene Papierstapel eine Geschichte voller Leidenschaft und Enthusiasmus, ohne die Wissenschaft auch heute undenkbar wäre. Erst vor Kurzem erschien im *Journal of Pure and Applied Algebra* der Aufsatz eines französischen Mathematikers, der seiner Arbeit

(zu einem anderen algebraischen Thema) ausdrücklich eine Widmung an Hermes und sein »wunderbares Kunstwerk aus Zahlen und Zeichnungen« vorangestellt hat.

**COPYRIGHT:** ZEIT ONLINE

**ADRESSE:** <http://www.zeit.de/2012/34/Algebra-Koffer-Johann-Gustav-Hermes>