Parakompakte und vollnormale Räume

Diplomarbeit

von

Joachim Mohr

1969

Inhaltsverzeichnis

Konventionen und Bezeichnungen:

1) Ein Raum ist stets ein topologischer Raum. Wenn nichts anderes gesagt ist, werden keine Trennungsaxiome vorausgesetzt. Regulär und normal impliziert also nicht hausdorffsch. Bei einem topologischen Raum wird oft nur die Grundmenge angegeben. In manchen Fällen muß man spezifizieren. Bei dem Raum $(E,\mathcal{O})$ bezeichne dann E die Grundmenge und $\mathcal{O}$ die Familie der offenen Mengen.

2) Sei E ein topologischer Raum und $A,B\subset E$. Dann bezeichne $B-A$ alle Punkte von B, die nicht in A liegen, $A^c=E-A$, A^- den Abschluß von A und $A^o= A^{c-c}$ den offenen Kern von A.

A "schneidet" oder "trifft" B, falls A und B nicht leeren Durchschnitt haben.

3) Wie üblich ist eine Familie von Teilmengen offen (abgeschlossen etc.), wenn ihre Elemente offen(abgeschlossen etc.) sind.

4) Umgebungen und Überdeckungen sind nicht notwendig offen.

5) $\emptyset$ bezeichne die leere Menge, $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen.

1. Einleitung

In dieser Arbeit werden Klassen von topologischen Räumen betrachtet, in denen man aus einer gegebenen Überdeckung in gewisser Weise eine neue Überdeckung bilden kann, indem man die Elemente der gegebenen Überdeckung zerlegt und neu zusammenfaßt, d.h. "verfeinert". Diese neue Überdeckung wird aus der Sicht eines Punktes x ("lokal") beurteilt. Bei parakompakten Räumen ist sie "lokalendlich", d.h. induziert sie in einer passenden Umgebung von x eine endliche Überdeckung; bei vollnormalen Räumen sind alle Elemente von ihr, in denen x liegt, zusammen in einem Element der gegebenen Überdeckung enthalten.[1),2)]

P.S.Alexandroff(1960,a)) [3)] schreibt über die parakompakten Räume (Auf den Zusammenhang von parakompakt und vollnormal komme ich gleich in I) zu sprechen):

"Die Klasse der parakompakten Räume ist sehr wahrscheinlich die wichtigste Klasse von topologischen Räumen, die in den letzten Jahren definiert wurde."

---

1) Die genauen Definitionen findet man in den §§ 2,3

2) Den Begriff "lokalendlich" führte P.S. Alexandroff (1924) ein, "parakompakt" J.Dieudonné(1944) und "vollnormal" J.Tu¢key(1940).

3) Die Jahreszahlen hinter Eigennamen beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende dieser Arbeit (S.56).

Unter diesem Gesichtspunkt lohnt es sich, die Eigenschaften parakompakter und vollnormaler Räume zu untersuchen. Die vorliegende Arbeit will einen Überblick darüber geben.

Den folgenden beiden Punkten wird besondere Aufmerksamkeit gewidmet:

I) Die parakompakten Räume lassen sich durch -wie es scheint- ganz verschiedene Eigenschaften charakterisieren. Die wichtigste davon ist die Vollnormalität. Eine Absicht dieser Arbeit ist es, diese Eigenschaften in eine bessere logische Ordnung zu bringen. Z.B. fand ich den wichtigen Satz von A.H.Stone (vollnormal $\Rightarrow$ parakompakt) nur für hausdorffsche oder reguläre Räume bewiesen.[1] Allgemein gilt jedoch[2] (Ich fasse hier gleich die übrigen Eigenschaften zusammen):

In einem topologischen Raum sind folgende Aussagen äquivalent:

a) E ist normal und parakompakt.

b) Jede offene Überdeckung von E besitzt eine abgeschlossene lokalendliche Verfeinerung.

c) E ist vollnormal.

d) Jede offene Überdeckung besitzt eine Verfeinerung, deren Elemente in einer gröberen pseudometrisierbaren Topologie liegen.

---

1) Man beachte: In parakompakten Räumen gilt: hausdorffsch $\Rightarrow$ regulär $\Rightarrow$ normal .-

2) In L.Hadard(1968) wird die Gleichwertigkeit von a) und c) angekündigt, aber nicht bewiesen.

Bei den Anwendungen eignet sich der Begriff des parakompakten Raumes wenig ohne zusätzliche Voraussetzungen[1]. Mir scheint, daß als zusätzliche Eigenschaft normal genügt. Wegen der Äquivalenz a)$\Leftrightarrow$c) spreche ich, falls ich zur Parakompaktheit noch zusätzlich die Normalität voraussetzen muß, von vollnormalen Räumen.

II) Das Studium der vollnormalen Räume führte zu einem tieferen Verständnis der topologischen Eigenschaften metrischer[2] Räume. Aus der Eigenschaft d) erkennen wir, welche Rolle eine Metrik für vollnormale Räume spielt. Andererseits rührt wohl ein großer Teil der Anschaulichkeit[3] metrischer Räume von der Eigenschaft her, daß sie vollnormal sind (vgl. die Ausführungen bei (5.4)).

Als man die topologischen Räume als Verallgemeinerung der metrischen Räume, als die Invariante bezüglich der Homöomorphismen definierte, entstand natürlich die Frage: Wie stark ist die Verallgemeine-

---

1) Viele Autoren nennen einen Raum deshalb nur dann parakompakt, wenn er auch hausdorffsch ist (z.B. J. Dieudonné (1944)) oder regulär (z.B. J.R. Kelley (1955)).

2) Die folgenden Ausführungen gelten entsprechen für pseudometrische Räume, bei denen nur der unschöne Name stört (vgl. Kelley (1955), S. 130).

3) Im folgendem Sinn: Ein Sachverhalt ist "anschaulich", wenn man aus dem "Gesehenen" verfolgen kann, wie er aus Axiomen oder Sätzen (z.B. der Dreiecksungleichung) folgt. ~~So sind auch die Skizzen hier zu verstehen.~~

rung? Und: Wenn in einem metrischen Raum nur die topologischen Eigenschaften ein Problem (z.B. die Dimension) berühren, kann man ihn dann nicht besser durch topologische Eigenschaften als durch eine Abstandsfunktion charakterisieren, als Eigenschaften wie regulär oder kompakt?

P.S.Alexandroff und P.Urysohn(1923) gaben zwar schon mit Hilfe von Überdeckungen eine notwendige und hinreichende Bedingung. Aber diese Lösung hielt man bis in die Mitte dieses Jahrhunderts kaum für brauchbar. Heute erscheint uns dieser Satz -im Lichte des erwähnten Satzes von A.H.Stone- befriedigender.

Der Satz von A.H.Stone (in der Form:Jeder metrische Raum ist parakompakt) war der Schlüssel für einen epochemachenden Metrisierbarkeitssatz von R.H.Bing (1951), J.Nagata(1950) und Yu.Smirnov(1951). Er erlaubte z.B. eine befriedegende Dimensionstheorie nun in allgemeinen -nicht mehr nur separablen- metrischen Räumen aufzustellen.

Dieser Satz von Bing-Nagata-Smirnov erschöpfte nicht die Untersuchungen, sondernregte zu weiteren Forschungen an. Auf Untersuchungen von P.Alexandroff(1960) über das Abzählbarkeitsaxiom stützte sich A.Archangelski(1960). Er fand einen sehr bemerkenswerten und einfachen Metrisierbarkeitssatz.

Eine weitere Absicht dieser Arbeit ist es, zu zeigen: Der Beweis, daß diese Bedingungen hinreichend für die Metrisierbarkeit sind, läßt sich in allen Fällen auf den nun als fundamental angesehenen Satz von

Alexandroff-Urysohn zurückführen; ähnlich wie dies D.Rolfsen(1966) für den Satz von Bing-Nagata-Smirnov durchführt. Rolfsen liefert einen direkten Beweis. Im Gegensatz dazu, glaube ich, daß die Pointe eines sochen Beweises der Nachweis der Vollnormalität ist, und eben diesen Teil kann man stets aus einem Satz über parakompakte bzw.vollnormale Räume finden.

Zum Schluß möchte ich noch einiges über die einzelnen Paragraphen bemerken.

Die §§ 2 und 3 haben die bekannten Sätze über parakompakte und vollnormale Räume zum Inhalt.

Im folgenden §4 wird der Metrisierbarkeitssatz von Alexander-Urysohn nocheinmal bewiesen. Der geradlinigste Beweis dieses Satzes scheint mir heute zu sein: wenn eine reguläre Sternentwicklung existiert, so gibt es eine mit der Topologie verträgliche uniforme Struktur mit abzählbarer Basis.(Seltsamerweise ist mir ein solcher Beweis in der mir bekannten Literatur nicht begegnet.) Die Einführung einer (Pseudo-) Metrik und die damit verbundene oft knifflige Analysis wird denn auf einen Fall zurückgeführt, wo sie seit Frink(1937) meiner Ansicht nach durchschaubar ist. Zum andern habe ich versucht zu zeigen, wie der Zusammenhang von Überdeckungen und und uniformen Strukturen in vollnormalen Räumen ist.

Beim Beweis des Satzes von A.H. Stone im§5 wird besondere Wert auf die Parallelität zwischen dem metrischen und vollnormalen Fall gelegt.

Über die weiteren klassischen Metrisierbarkeitssätze, die im §6 besprochen werden, ist alles gesagt.

Ein bekannter Satz für topologische Gruppen wird am Anfang von §7 zitiert. Der zweite Teil dieses Paragraphen zeigt, daß lokalkompakte und parakompakte Räume hypokompakt sind.

Einen Satz von E.Michael konnte ich im §7 gleich für vollnormale Räume beweisen und damit eine These, die im §5 aufgestellt wird, erhärten. Der Beweis verläuft parallel wie der von E.Michael für metrische Räume (E.Michael mußte dann den allgemeinen Fall auf den metrischen zurückführen).

Der §9 bringt der Vollständigkeit halber noch den für die Anwendungen wohl wichtigsten Satz (Partition der Eins (, der in jedem neueren Lehrbuch über Topologie zu finden ist.

2. Parakompakte Räume

Eine Familie[1] $\{M_i\}_{i\in I}$ von Teilmengen eines topologischen Raumes E heißt lokalendlich, wenn jeder Punkt eine Umgebung besitzt, die nur endlich viele M_i $(i\in I)$ schneidet. Also ist $\{M_i\}_{i\in I}$ lokalendlich, wenn man E mit offenen Mengen überdecken kann, die nur endlich viele M_i $(i\in I)$ schneiden.

Eine Familie $\{V_j\}_{j\in J}$ ist eine Verfeinerung der Familie $\{U_i\}_{i\in I}$, wenn $\bigcup_{j\in J} V_j = \bigcup_{i\in I} U_i$ und jedes V_j $(j\in J)$ in einer Menge U_i $(i\in I)$ enthalten ist. Überdeckt $\{V_j\}$ also dieselbe Teilmenge von E wie $\{U_i\}$, dann ist $\{V_j\}$ eine Verfeinerung von $\{U_i\}$, falls eine Abbildung σ von J in I mit $V_j \subset U_{\sigma(j)}$ existiert.

2.1 Definition (Dieudonné (1944)): Ein topologischer Raum E heißt parakompakt, wenn jede offene Überdeckung eine lokalendliche offene Verfeinerung besitzt.

Jeder kompakte Raum ist also parakompakt. Ebenfalls jeder Raum, der mit der diskreten oder indiskreten Topologie ausgestattet ist. Weitere nichttriviale Beispiele werden wir später kennenlernen, wenn uns andere Charakterisierungen parakompakter Räume bekannt sind.

Eine endliche Familie ist lokalendlich. Wir dürfen hoffen, daß einige Eigenschaften, die endliche Familien

---

1) Zwischen einer indizierten Menge $\mathcal{M} = \{M_i\} = \{M_i\}_{i\in I}$ und einer Familie $\{M_i\}_{i\in I}$ von Mengen besteht ein logischer Unterschied. Aber in dieser Arbeit gibt es keinen wesentlichen Grund, darauf zu bestehen.

besitzen, auch lokalendliche haben.

2.2 Lemma: Sei $\{M_i\}_{i\in I}$ eine lokalendliche Familie von Teilmengen des topologischen Raumes E.

Dann gilt: (i) $\{M_i^-\}$ ist ebenfalls lokalendlich und (ii) $\bigcup_{j\in J} M_j^- = (\bigcup_{j\in J} M_j)^-$ für alle Teilmengen von I.

Bemerkung: Besitzt eine Familie $\{M_i\}_{i\in I}$ die Eigenschaft (ii), so heißt sie konservativ (russ.: "konservativnij". Der englische Namen trifft den Sachverhalt wohl besser : "closure preserving" .

Beweis: (i) Ist U eine offene Umgebung des Punktes $x\in E$, dann gilt für alle $i\in I$:

$U\cap M_i = \emptyset \Leftrightarrow M_i \subset U^c \Leftrightarrow M_i^- \subset U^c$ (da U^c abgeschlossen) $\Leftrightarrow M_i^- \cap U = \emptyset$. Somit: Ist $\{M_i\}$ lokalendlich, dann auch $\{M_i^-\}$.

(ii) Es genügt zu zeigen: Die Vereinigung einer lokalendlichen Familie $\{M_j\}_{j\in J}$ abgeschlossener Mengen ist wieder abgeschlossen bzw. deren Komplement offen. Sei $x\in(\bigcup_{j\in J} M_j)^c$ und U eine Umgebung von x, die höchstens $M_{j_1}, \dots, M_{j_n}$ trifft. Dann ist aber $U\cap M_{j_1}^c \cap \dots \cap M_{j_n}^c$ eine Umgebung von x , die mit allen M_j $(j\in J)$ einen leeren Durchschnitt hat und somit ganz in $(\bigcup_{j\in J} M_j)^c$ liegt. $\square$

Einige Eigenschaften beruhen auf folgenden Lemmata.

2.3 Lemma: Sei $\{P_i\}_{i\in I}$ eine Überdeckung und sei $\{V_j\}_{j\in J}$ eine lokalendliche Verfeinerung; etwa

$V_j \subset P_{\sigma(j)}$ ($j\in J$; $\sigma(j)\in I$)

Setze $Q_i = \bigcup_{\sigma(j)=i} V_j$.

Behauptung: $\{Q_i\}_{i\in I}$ ist lokalendliche Überdeckung mit $Q_i \subset P_i$.

Bemerkung: Ist $\{V_j\}_{j\in J}$ offene Überdeckung, so ist auch $\{Q_i\}_{i\in I}$ offene Überdeckung. Dasselbe gilt für abgeschlossen statt offen (2.2 ii).

Ist $V_j^- \subset P_{\sigma(j)}$, dann ist auch $Q_i^- \subset P_i$.

Beweis: Sei $x\in E$ und W Umgebung von x mit $W \cap V_j = \emptyset$ für alle $j\in J - \{j_1, \dots, j_n\}$ (W und $j_i \in J$ seien passend zu dem Punkt x gewählt).
Dann ist $W \cap Q_i = \emptyset$ für alle $i\in I - \{\sigma(j_1), \dots, \sigma(j_n)\}$, und somit ist W auch Umgebung von x, die mit fast allen Q_i $(i\in I)$ leeren Durchschnitt hat. $\square$

<u>2.4 Lemma:</u> (Dieudonné) Jeder abgeschlossene Teilraum eines parakompakten Raumes E ist parakompakt. Genauer: Ist $\{V_i\}_{i\in I}$ eine (bezüglich E) offene Überdeckung des abgeschlossenen Teilraumes A, dann existiert eine (bez. E) offene lokalendliche Verfeinerung $\{W_i\}_{i\in I}$, die A überdeckt.

Beweis: Die offene Überdeckung $\{V_i\}_{i\in I} \cup \{A^c\}$ besitzt lokalendliche Verfeinerung $\{W_i\}_{i\in I} \cup \{B\}$ mit $W_i \subset V_i$ $(i\in I)$ und $B \subset A^c$. Dann ist $\{W_i\}_{i\in I}$ lokalendliche A überdeckende Verfeinerung von $\{V_i\}$.

$\square$

Nun können wir nachweisen, daß unter den parakompakten Räumen die normalen Räume in den regulären und diese wiederum in den hausdorffschen entalten sind. Muß man in parakompakten Räumen noch eine zusätzliche Eigenschaft fordern, so ist die Normalität die schwächste unter diesen dreien (, und - wie wie sehen werden- genügt in allen Fällen die Normalität). Es gilt nämlich:

<u>2.5 Satz</u> (Dieudonné):

(i) Jeder parakompakte Hausdorff-Raum ist regulär.

(ii) Jeder parakompakte reguläre Raum ist normal.

Beweis: (i) Sei A eine abgeschlossene Menge und $x \notin A$. Da E hausdorffsch ist, gibt es zu jedem Punkt $x \in A$ eine offene Umgebung U_a, deren Abschluß den Punkt x nicht enthält ($x \notin U_a^-$). Nach (2.4) besitzt die Überdeckung $\{U_a\}_{a \in A}$ von A eine offene lokalendliche Verfeinerung $\{V_i\}_{i \in I}$, die A überdeckt. Da $x \notin V_i^-$ ist, ist $x \notin (\bigcup_{i \in I} V_i^-) = (\bigcup_{i \in I} V_i)^-$. Also sind $\bigcup_{i \in I} V_i$ und $(\bigcup_{i \in I} V_i)^{-c}$ disjunkte Umgebungen von A und x .

(ii) Sei nun E parakompakt und regulär. Wir zeigen: Zwei disjunkte abgeschlossene Mengen A_1 und A_2 besitzen disjunkte Umgebungen. Wir setzen $P_i = A_i^c$ $(i=1,2)$. Dann ist $\{P_i\}_{i=1,2}$ eine offene Überdeckung von E. Da E regulär ist, können wir voraussetzen, daß jeder Punkt $a \in A$ eine offene Umgebung bestitzt, deren Abschluß ganz in einem P_i (i=1 oder 2) liegt. Die Gesamtheit solcher Überdeckungen besitzt eine offene lokalendliche Verfeinerung. Wir haben damit eine Überdeckung von A so kostruiert, daß der Abschluß jedes Elementes von ihr in einem P_i (i = 1 oder 2) liegt. Nach (2.3) gibt es lokalendliche offene Überdechung $\{Q_i\}_{i=1,2}$ mit $Q_i^- \subset P_i$. Mit Q_1^{-c} und Q_2^{-c} haben wir disjunkte Umgebungen von A_1 und A_2. (Man beachte: $Q_1 \cup Q_2 = E \Rightarrow Q_1^{-c} \cap Q_2^{-c} = \emptyset$. Und: $Q_1^- \subset P_1 \Rightarrow A_1 = P_1^c \subset Q_1^{-c}$) $\square$

Aus dem Beweis von (ii) sieht man sofort, indem man statt $i \in \{1,2\}$ $i \in I$ für eine beliebige Indexmenge wählt:

Zu jeder offenen Überdeckung $\{P_i\}_{i\in I}$ eines parakompakten Raumes gibt es eine offene Überdeckung $\{Q_i\}_{i\in I}$ mit $Q_i^- \subset P_i$ $(i\in I)$. Wir brauchen diesen Satz in etwas stärkerer Form (2.7) (normal statt regulär). Dann müssen wir ihn allerdings anders, mit Hilfe des Zornschen Lemmas, beweisen.

Wir nennen eine Familie $\{P_i\}_{i\in I}$ <u>punktendlich</u>, wenn jeder Punkt nur in endlich vielen P_i $(i\in I)$ liegt. Eine lokalendliche Familie ist mithin punktendlich. Mit dieser Definition können wir den "<u>Schrumpfungssatz</u>" formulieren. vgl. Lefschetz, 1942, Algebraic Topology

<u>2.6 Satz</u> (Dieudonné): Sei E ein normaler Raum. Dann existiert zu jeder punktendlichen offenen Überdeckung Familie $\{P_i\}_{i\in I}$ eine offene lokalendl. Familie $\{Q_i\}_{i\in I}$ ~~mit~~ mit $Q_i^- \in P_i$ $(i\in I)$.

Beweis: Setze $\mathfrak{D} = \{ \{Q_i\}_{i\in J} \mid J\subset I;\ Q_i$ offen und $Q_i^- \subset P_i\,(i\in J);$ $(\bigcup_{i\in J} Q_i) \cup (\bigcup_{i\in I-J} P_i) = E\}$ $(\{Q_i\}_{i\in\phi} \in \mathfrak{D} \Rightarrow \mathfrak{D} \neq \phi)$.

Durch die Definition

$\{Q_i^{(1)}\}_{i\in J_1} < \{Q_i^{(2)}\}_{i\in J_2} \overset{}{\underset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow}} J_1 \subset J_2$ und für alle $i\in J_1$:
$Q_i^{(1)} = Q_i^{(2)}$

wird $\mathfrak{D}$ (transitiv, antisymmetrisch und reflexiv) geordnet. Sei $\{\{Q_i^{(\lambda)}\}_{i\in J_\lambda} \mid \lambda\in\Lambda\}$ eine Kette aus $\mathfrak{D}$. Wir zeigen: Diese Kette besitzt eine obere Schranke in $\mathfrak{D}$. Nämlich: $\{Q_i\}_{i\in J}$, wobei $J = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} J_\lambda$ und für $i\in J$, etwa $i\in J_\lambda$, $Q_i = Q_i^{(\lambda)}$ (wohldefiniert!) sei. Sei also $x\in E$, $x\in P_{i_1}\cap\ldots\cap P_{i_n}$ $(N := \{i_1, \ldots, i_n\}\subset I)$ und $x\notin P_i$ für $i\in I-N$ (N passend zu x gewählt). Wir nehmen an, daß $x\notin \bigcup_{i\in I-J} P_i$ sei. Dann ist $N\subset J$ und -da $\{J_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ Kette und N endlich ist- $N\subset J_\lambda$ für ein λ aus N. Dann ist $x\notin \bigcup_{i\in I-J_\lambda} P_i$, also $x\in \bigcup_{i\in J_\lambda} Q_i \subset \bigcup_{i\in J} Q_i$. Wir sehen :

$(\bigcup_{i\in J} Q_i) \cup (\bigcup_{i\in I-J} P_i) = E$. Jede Kette in $\mathfrak{D}$ hat infolgedessen eine obere Schranke. Nach dem Zornschen Lemma dürfen wir voraussetzen, daß $\mathfrak{D}$ ein maximales Element besitzt. Der Beweis unseres Satzes ist fertig, wenn sich herausstellt, daß jedes $\{Q_i\}_{i\in J} \in \mathfrak{D}$ mit $J \neq I$ nicht maximal ist. Sei etwa $\kappa \in I-J$. Setzt man $R := (\bigcup_{i\in J} Q_i) \cup (\bigcup_{\substack{i\in I-J \\ i\neq \kappa}} P_i)$, dann ist $R \cup P_\kappa = E$, also die abgeschlossene Menge R^c in P_κ enthalten. Wegen der Normalität von E existiert eine offene Menge Q_κ mit

$$R^c \subset Q_\kappa \subset Q_\kappa^- \subset P_\kappa .$$

Die Familie $\{Q_i\}_{i\in J\cup\{\kappa\}}$ ist aus $\mathfrak{D}$ und ist echt größer als $\{Q_i\}_{i\in J}$ $\square$

<u>2.7 Korollar</u>: Zu jeder offenen Überdeckung $\{P_i\}_{i\in I}$ eines normalen parakompakten Raumes existiert eine offene lokalendliche Überdeckung $\{Q_i\}_{i\in I}$ mit $Q_i^- \subset P_i$ für alle $i\in I$ $\square$

Wir werden sehen, daß mit der Voraussetzung und der Behauptung des Satzes gleichwertig ist: Zu jeder offenen Überdeckung existiert eine lokalendliche abgeschlossene Verfeinerung.

In regulären Raumen kann die Parakompaktheit schon unter wesentlich schwächeren Bedingungen nachgewiesen werden. Für den folgenden wichtigen Satz definieren wir noch: "Die Familie $\mathcal{V}$ von Teilmengen eines topologischen Raumes ist <u>σ-lokalendlich</u>" besagt: $\mathcal{V}$ ist die Vereinigung von abzählbar vielen lokalendlichen Familien.

2.8 Satz (E.Michael(1953)): Sei E ein regulärer Raum.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) E ist parakompakt.

(ii) Jede offene Überdeckung besitzt eine σ-lokalendliche offene Verfeinerung.

(iii) Jede offene Überdeckung besitzt eine lokalendliche Verfeinerung.

(iv) Jede offene Überdeckung besitzt eine lokalendliche abgeschlossene Verfeinerung.

Beweis: "(i) $\Rightarrow$(ii)" ist trivial.

"(ii) $\Rightarrow$(iii)". Sei $\mathcal{U}$ offene Überdeckung und $\mathcal{V} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ offene σ-lokalendliche Verfeinerung, wobei $\mathcal{V}_n$ lokalendlich sei $(n\in\mathbb{N})$. Setze für alle $n\in\mathbb{N}$ $A_n = \bigcup_{V\in\mathcal{V}_n} V$, $B_1=A_1$ und für $n>1$ $B_n=A_n\cap A_1^c\cap \dots \cap A_{n-1}^c$. $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist lokalendliche Überdeckung, denn jedes $x\in E$ ist in einem A_n und -wählt man n minimal- in $B_n=A_n\cap A_1^c\cap \dots \cap A_{n-1}^c$. Für $m>n$(also für fast alle $m\in\mathbb{N}$) hat die Umgebung A_n von x mit $B_m\subset A_n^c$ leeren Durchschnitt.

Die Verfeinerung $\mathcal{W} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{V\cap B_n \mid V\in\mathcal{V}_n\}$ von $\mathcal{U}$ ist dann ebenfalls lokalendlich, denn jeder Punkt $x\in E$ besitzt eine Umgebung Q, die nur endlich viele B_n trifft, etwa höchstens B_n für $n\leq m$, und besitzt Umgebungen $Q_1, \dots, Q_m$, wobei Q_i nur endlich viele Elemente aus $\mathcal{V}_i$ trifft. Demzufolge trifft die Umgebung $Q\cap Q_1\cap \dots \cap Q_m$ von x nur endlich viele Elemente aus $\mathcal{W}$.

"(iii) $\Rightarrow$ (iv)": Sei $\mathcal{U}$ offene Überdeckung von E. Da wir generell vorausgesetzt haben, daß E regulär ist, existiert eine offene Überdeckung so, daß der Abschluß eines jeden ihrer Elemente in einem Element $U\in\mathcal{U}$ liegt.

Bilden wir eine lokalendliche Verfeinerung $\mathcal{A}$ dieser Überdeckung, so liegt der Abschluß eines jeden Elementes $A \in \mathcal{A}$ in einem $U \in \mathcal{U}$. Mit $\{A^- \mid A \in \mathcal{A}\}$ haben wir eine abgeschlossene lokelendliche (2.2) Verfeienerung von $\mathcal{U}$.

"(iv) $\Rightarrow$ (i)": Dieses ist der schwierigste Schritt. Wir klären zwei Punkte, die in diesem Beweisschritt vorkommen, in 1) und 2) im Voraus. Der endgültige Beweis in 3) ist dann nicht mehr schwierig.

1) " Seien $\mathcal{W}$ und $\{A_i\}_{i \in I}$ Überdeckungen. Setze für alle $i \in I$: $A_i' = \bigcap \{ W^c \mid W \cap A_i = \emptyset;\ W \in \mathcal{W} \}$
(Man beachte: Der Durchschnitt einer leeren Familie von Teilmengen von E ist E. Gibt es kein $W \in \mathcal{W}$ mit $A_i \cap W = \emptyset$, dann ist $A_i' = E$).

Dann gilt: $A_i \subset A_i'$ und ($W \cap A_i = \emptyset \Leftrightarrow W \cap A_i' = \emptyset$ ($W \in \mathcal{W}$))".
Der erste Teil dieser Behauptung folgt aus:

$$A_i \cap W = \emptyset \Rightarrow A_i \subset W^c .$$

Der zweite aus:

$$W_o \cap A_i = \emptyset \Rightarrow A_i' = \bigcap \{ W^c \mid W \in \mathcal{W}; A_i \cap W = \emptyset \} \subset W_o^c \Rightarrow$$
$$W_o \cap A_i' \subset W_o \cap W_o^c = \emptyset .$$

2) "Seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{W}$ und $\mathcal{A}'$ Überdeckungen. Jedes Element von $\mathcal{C}$ treffe nur endlich viele Elemente von $\mathcal{W}$, und jedes Element von $\mathcal{W}$ treffe nur endlich viele von $\mathcal{A}'$. Dann trifft jedes Element von $\mathcal{C}$ nur endlich viele von $\mathcal{A}'$."
Sei nämlich $C \in \mathcal{C}$ und $C \cap W = \emptyset$ für alle $W \in \mathcal{W} - \{W_1, \ldots, W_n\}$
Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei $W_i \cap A' = \emptyset$ für alle $A' \in \mathcal{A}' - \{A_1', \ldots, A_m'\}$ (W_i und A_j' passend gewählt).
Ist $C \cap A' \neq \emptyset$ für $A' \in \mathcal{A}'$, etwa $y \in C \cap A'$, dann ist -da $C \cap W = \emptyset$ für alle $W \in \mathcal{W} - \{W_1, \ldots W_n\}$ — $y \in W_i$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$, somit $A' \in \{A_1', \ldots, A_m'\}$, da $A' \cap W_i \neq \emptyset$.

3) Sei $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von E.
Schritt für Schritt definieren wir:

Eine lokalendliche Überdeckung $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ mit $A_i \subset U_i$;
eine offene Überdeckung $\mathcal{B}$, wobei jedes Element von $\mathcal{B}$ nur endlich viele von $\mathcal{A}$ trifft;
eine lokalendliche abgeschlossene Verfeinerung $\mathcal{W}$ von $\mathcal{B}$;
eine offene Überdeckung $\mathcal{C}$, wobei jedes Element von $\mathcal{C}$ nur endlich viele von $\mathcal{W}$ trifft

und schließlich definieren wir noch wie in 1) $\{A'_i\}_{i \in I}$.

Da $\mathcal{W}$ lokalendlich ist, ist für alle $i \in I$ A'_i offen (2.2). Aus 2) folgt, daß jedes Element von $\mathcal{C}$ nur endlich viele A'_i trifft; d.h. $\{A'_i\}$ ist lokalendlich. Somit ist $\mathcal{V} = \{ A'_i \cap U_i \mid i \in I \}$ lokalendliche offene Verfeinerung von $\mathcal{U}$. $\square$

Dieser Satz ist sehr hilfreich, wenn man nachweisen will, daß ein regulärer Raum parakompakt ist.

<u>2.9 Beispiel:</u> Sei S die Menge der reellen Zahlen und auf S die halboffene Topologie erklärt (d.h. eine Basis der Topologie sind die halboffenen Intervalle $[a,b)$). Dieser Raum ist hausdorffsch und regulär. Wir zeigen: Dieser Raum ist auch parakompakt.

Beweis: Sei $\mathcal{A}$ Überdeckung von S. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß alle Elemente von $\mathcal{A}$ der Form $[a,b)$ sind mit ganzrationalem b. Für alle ganzrationale b sei genau dann $b \in S_1$, falls es $a_b \in S$ gibt mit $\inf \{ a \mid a \in S \text{ und } [a,b) \in \mathcal{A} \} \in [a_b, b)$. Dann ist $\{ [b',b) \mid b', b \text{ ganzrational und es gibt } a \in S \text{ mit } [b',b) \subset [a,b) \in \mathcal{A} \} \cup \{ [a_b, b) \mid b \in S_1 \}$ eine offene abzählbare (mithin σ-lokalendliche) Verfeienerung von $\mathcal{A}$. □

2.10 Lemma: Sei E ein regulärer Raum, und besitze E eine offene lokalendliche Überdeckung $\mathcal{R}$, wobei jedes $R \in \mathcal{R}$ lindelöfsch sei (d.h. jede (bezüglich R oder E offene) Überdeckung von R besitzt eine abzählbare Teilüberdeckung).

Behauptung: E ist parakompakt.

Beweis: Sei $\mathcal{U}$ offene Überdeckung von E. Für jedes $R \in \mathcal{R}$ wählen wir abzählbar viele $U_n^{(R)} \in \mathcal{U}$ $(n \in \mathbb{N})$, die R überdecken. $\mathcal{V}_n = \{U_n^{(R)} \cap R \mid R \in \mathcal{R}\}$ ist offen und lokalendlich. Die Verfeinerung $\mathcal{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ von $\mathcal{U}$ ist infolgedessen σ-lokalendlich. Nach (2.8 ii) ist E also parakompakt. □

2.11 Korollar 1 (Morita (1948)): Jeder reguläre Lindelöfraum ist parakompakt.

2.12 Korollar 2 (Dieudinné)[1]: Jeder σ-kompakte Hausdorffraum ist parakompakt.

Beweis: E ist regulär und lindelöfsch. □

Folgender Satz verstärkt (2.5):

2.13 Satz (Michael (1953)): Jede F_σ-Menge eines parakompakten regulären Raumes ist parakompakt.

Beweis: Sei $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ eine F_σ-Menge (A_n abgeschlossen für alle $n \in \mathbb{N}$). Sei $\mathcal{R}$ eine bezüglich F offene Überdeckung von F. Jedes $R \in \mathcal{R}$ läßt sich in eine bezüglich E offene Menge R' einbetten, sodaß $R = F \cap R'$ ist. Die Überdeckungen $\mathcal{W}_n = \{A_n^c\} \cup \mathcal{R}'$ von E ($\mathcal{R}' = \{R' \mid R \in \mathcal{R}\}$) besitzen offene lokalendliche Verfeinerungen $\mathcal{S}_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Mit $\mathcal{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n$, wobei $\mathcal{V}_n = \{F \cap S \mid S \in \mathcal{S}_n\}$, erhalten wir eine σ-lokalend-

---

1) Dieudonné mußte noch zusätzlich fordern, daß E lokalkompakt ist. Michael (1953) konnte darauf verzichten.

endliche Verfeinerung . $\square$

Damit beschließen wir die unmittelbaren Folgerungen des Lemmas von Michael[1] und kommen nun zu einer anderen bemerkenswerten Charakterisierung parakompakter Räume.

Wir nennen eine Überdeckung $\mathfrak{B}$ regulär, wenn zu einem Punkt $x \in E$ und zu jeder Umgebung U von x eine Umgebung V so gefunden werden kann, daß nur endlich viele $B \in \mathfrak{B}$ die Mengen V und U^c schneiden.

Eine lokalendliche Überdeckung ist also regulär.

2.14 Lemma (frei nach Archangelski(1960)):

Die maximalen Elemente einer regulären offenen Überd. bilden eine lokalendliche Teilüberdeckung.

Beweis: Ich zeige: (i) Jedes Element A einer regulären offenen Überdeckung ist in einem maximalen Element enthalten. Und (ii): Die maximalen Elemente $\mathcal{A}$ einer offenen regulären Überdeckung bilden eine lokalendliche Familie.

Sei also $\mathfrak{B}$ eine reguläre offene Überdeckung.

(i) Sei $A \in \mathfrak{B}$ und ohne Einschränkung $A \neq \emptyset$, etwa $x \in A$. Es gibt eine Umgebung V von x mit $V \cap B = \emptyset$ oder $A^c \cap B = \emptyset$ für alle $B \in \mathfrak{B} - \{B_1, \ldots, B_n\}$ (B_i passend gewählt). Ist $V \cap B = \emptyset$, dann ist $x \notin B$; ist $A^c \cap B = \emptyset$, dann ist $B \subset A$. Wir erhalten: $A \not\subset B$ oder $B \subset A$ für alle $B \in \mathfrak{B} - \{B_1, \ldots, B_n\}$; d.h. A ist maximal in $\mathfrak{B} - \{B_1, \ldots, B_n\}$. Dann gibt es maximales $B \in \mathfrak{B}$ - nämlich $B \in \{A, B_1, \ldots, B_n\}$ - mit $A \subset B$.

(ii) Sei $\mathcal{A}$ die Familie aller maximalen Elemente von $\mathfrak{B}$; sei $x \in E$, und sei $x \in A$ für ein $A \in \mathcal{A}$. Es gibt

---

1)Weitere ähliche Charakterisierungen sind in Michael(1957),(1959) und Katuta(1967).

eine Umgebung V von x mit $V \cap B = \emptyset$ oder $A^c \cap B = \emptyset$ für fast alle $B \in \mathcal{A}$. Der zweite Fall $A^c \cap B = \emptyset$, d.h. $B \subset A$, kann aber wegen der Maximaleigenschaft von B nur für B = A eintreten. Wir haben also mit V eine Umgebung von x, die mit fast allen $B \in \mathcal{A}$ leeren Durchschnitt hat. $\square$

2.15 Korollar: Ein topologischer Raum ist dann genau parakompakt, wenn jede Überdeckung eine reguläre Verfeinerung besitzt.

3. Vollnormale Räume

Ist $\mathcal{S}$ eine Familie von Teilmengen von E, dann ist der Stern einer Teilmenge A von E bzüglich $\mathcal{S}$ definiert als $st(A, \mathcal{S}) = \bigcup\{S \mid S \in \mathcal{S} \text{ und } S \cap A \neq \emptyset\}$

Insbesondere ist $st(x, \mathcal{S}) = \bigcup\{S \mid S \in \mathcal{S};\ x \in S\}$ für einen Punkt $x \in E$ und $st(A, \mathcal{S}) = \bigcup_{x \in A} st(x, \mathcal{S})$.

Eine Verfeinerung $\mathcal{B}$ einer Familie $\mathcal{A}$ heißt Sternverfeinerung, wenn für alle $x \in E$ $st(x, \mathcal{B}) \subset A$ für ein $A \in \mathcal{A}$. Sie heißt starke Sternverfeinerung, wenn für alle $B \in \mathcal{B}$ $st(B, \mathcal{B}) \subset A$ für ein $A \in \mathcal{A}$.

3.1 Definition: (Tukey(1940)):

Ein topologischer Raum heißt vollnormal (engl.: "fully normal"), wenn jede offene Überdeckung eine offene Sternverfeinerung besitzt.

3.2 Lemma (Tukey(1940)): Jede offene Überdeckung eines vollnormalen Raumes besitzt eine starke offene Sternverfeinerung.

Beweis: Zu einer offenen Überdeckung $\mathcal{A}$ können wir eine offene Sternverfeinerung $\mathcal{B}$ finden und zu $\mathcal{B}$ eine offene Sternverfeinerung $\mathcal{C}$. Dann ist $\mathcal{C}$ starke

Sternverfeinerung von $\mathcal{A}$; denn $x \in C \in \mathcal{C}$ impliziert $st(C, \mathcal{C}) \subset st(x, \mathcal{B}) \subset A$ für ein $A \in \mathcal{A}$. $\square$

Jeder vollnormale Raum ist, wie sich aus dem fogenden Satz ergeben wird, normal, ja sogar "kollektiv-normal".

Wie üblich zuvor einige Definitionen:

Eine Familie $\{S_i\}_{i \in I}$ von Teilmengen eines topologischen Raumes heißt <u>diskret</u>, wenn jeder Punkt eine Umgebung besitzt, die ~~nur endlich viele Elemente von~~ S_i trifft; sie heißt <u>σ-diskret,</u> wenn sie Vereinigung von abzählbar vielen diskreten Familien ist.

Eine Familie $\{A, B\}$ von nur zwei Elementen ist also diskret, wenn $A^- \cap B^- = \emptyset$ ist. Wenn der Raum normal ist, dann existiert zu dieser diskreten Familie eine offene Familie $\{U, V\}$ von zwei disjunktenMengen mit $A \subset U$ und $B \subset V$.

<u>3.3 Definition</u> (Bing(1951)): Ein Raum heißt <u>kollektiv-normal</u>, wenn zu jeder diskreten Familie $\{S_i\}_{i \in I}$ eine Familie offener disjunkter Mengen $\{O_i\}_{i \in I}$ existiert mit $S_i \subset O_i$ für alle $i \in I$.

Bemerkung: Andere Charakterisierungen kollektiv-normaler Räume kommen bei Katětov (1958) vor.

<u>3.4 Lemma</u> (Kelley, (1955 S. 156)): Sei E vollnormaler Raum. Zu jeder diskreten (lokalendlichen) Familie $\{S_i\}_{i \in I}$ existiert eine offene diskrete (lokal-endliche) Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ mit $S_i \subset U_i$ für alle $i \in I$.

Beweis: Sei $\{S_i\}_{i \in I}$ eine diskrete Familie. Es existiert eine offene Überdeckung $\{U_x\}_{x \in E}$ so, daß jedes U_x $(x \in E)$ höchstens ein S_i $(i \in I)$ trifft. Zu dieser Überdeckung

$\{U_x\}_{x \in E}$ sei $\mathfrak{G}$ starke Sternverfeinerung (3.2). Für
S_i $(i \in I)$ ist $U_i := st(S_i, \mathfrak{G})$ offene Umgebung.[1] Sei $x \in E$
und $B \in \mathfrak{G}$ mit $x \in B$. Mit B haben wir eine Umgebung von
x, die höchstens ein U_i trifft, denn $st(B, \mathfrak{G})$ ist in
einem U_y $(y \in E)$ enthalten, trifft also höchstens ein
S_i $(i \in I)$. (Es empfiehlt sich oft bei Sternverfeinerungen,
sich den Sachverhalt an einer Figur zu verdeutlichen.
Z.B.:Würde in unserem Beweis B U_i und U_j treffen,
so könnte man das folgendermaßen skizzieren:

Man "sieht", U_y würde in diesem Fall S_i und S_j treffen).

Damit ist der Satz für eine diskrete Familien bewiesen. Für lokalendliche Familien können wir den Beweis entsprechend führen. $\square$

<u>3.5 Korollar</u> (Bing(1951)): Jeder vollnormale Raum ist kollektiv-normal.

Für topologische Räume gilt also die Implikation:

<u>vollnormal $\Rightarrow$ kollektiv-normal $\Rightarrow$ normal.</u>

<u>3.6 Lemma</u>: Sei E ein topologischer Raum und besitze jede offene Überdeckung eine abgeschlossene lokalendliche Verfeinerung.

Behauptung: E ist vollnormal.

Beweis: Sei $\{P_i\}_{i \in I}$ offene Überdeckung und $\{Q_i\}_{i \in I}$
eine abgeschlossene lokalendliche Verfeinerung mit

---

1) Ohne Einschränkung können wir $E \cap I = \emptyset$ voraussetzen.

$Q_i \subset P_i$ $(i \in I)$ (2.3). Für alle $x \in E$ setze

$$U_x = \Big(\bigcap_{x \in Q_i} P_i \Big) \cap \Big(\bigcap_{x \in Q_i^c} Q_i^{\,c} \Big) \qquad (i \in I)$$

Da stets $Q_i \subset P_i$, folgt $x \in U_x$. Aus der Lokalendlichkeit von $\{Q_i\}$ folgt einerseits: x liegt nur in endlich vielen Q_i, also $\bigcap_{x \in Q_i} P_i$ ist offen; andererseits (2.2): $\bigcup_{x \in Q_i^c} Q_i$ ist abgeschlossen, also $\bigcap_{x \in Q_i^c} Q_i^c = \big(\bigcup_{x \in Q_i^c} Q_i\big)^c$ offen. Somit ist U_x Umgebung von x. Wir zeigen: für $x \in Q_i$ und für alle $y \in E$ mit $x \in U_y$ ist $U_y \subset P_i$, also $st(x, \{U_y\}_{y \in E}) \subset P_i$. Sei also $x \in Q_i$ und $x \in U_y$ $(y \in E)$. Dann ist $y \in Q_i$ (sonst wäre mit $y \in Q_i^c$ auch $x \in U_y \subset Q_i^c$) und damit $U_y \subset P_i$.

Wir sehen: Zu jeder offenen Überdeckung $\{P_i\}$ gibt es eine offene Sternverfeinerung $\{U_y\}_{y \in E}$. ▱

4. Vollnormalität und Pseudometrisierbarkeit

Um die Notation einzuführen und um später darauf verweisen zu können, rufen wir einige Begriffe ins Gedächtnis zurück: Eine Familie von Teilmengen ist ein Filter, wenn sie nicht die leere Menge enthält, abgeschlossen ist bezüglich endlicher Durchschnittsbildung und mit jedem Element auch alle Obermengen dieses Elementes enthält. Bilden die Obermengen von Elementen einer Familie einen Filter, so ist diese Familie eine (Filter-)Basis dieses Filters.

<u>4.1 Definition:</u> a) Eine <u>uniforme Struktur</u> auf E ist ein Filter auf $E\times E$, wobei jede Filterbasis $\mathfrak{B}$ folgenden Bedingungen genügen muß.

(1) $U \in \mathfrak{B} \Rightarrow \Delta \in U \quad (\Delta = \{(x,x) \mid x \in E\})$ [1]

(2) $U \in \mathfrak{B} \Rightarrow \exists\, V \in \mathfrak{B}:\ V^{-1} \subset U \quad (V^{-1} = \{(x,y) \mid (y,x) \in V\})$.

(3) $U \in \mathfrak{B} \Rightarrow \exists\, V \in \mathfrak{B}:\ V \circ V \subset U \quad (V \circ V = \{(x,z) \mid \exists\, y \in E : (x,y) \in V \text{ und } (y,z) \in V\})$.

(4) $U, V \in \mathfrak{B} \Rightarrow \exists\, W \in \mathfrak{B}:\ W \subset U \cap V$.

Die uniforme Struktur ist mit einer Topologie <u>verträglich</u>, wenn $\{B(x)\}_{B \in \mathfrak{B}}$ mit $B(x) = \{y \mid (x,y) \in B\}$ eine Filterbasis des Umgebungsfiters von x ist. Die Topologie heißt dann <u>uniformisierbar.</u>

b) Eine <u>Pseudometrik</u> auf E ist eine (endliche,nichtnegative) reellwertige Funktion d auf $E\times E$, wobei für alle x,y und $z \in E$ gilt:

(5) $d(x,x) = 0$,

(6) $d(x,y) = d(y,x)$,

(7) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Die Pseudometrik ist mit einer uniformen Struktur <u>verträglich</u>, wenn $\mathfrak{B} = \{B_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ mit $B_\varepsilon = \{(x,y) \mid d(x,y) < \varepsilon\}$ eine Basis der uniformen Strucktur ist. Die uniforme Strucktur heißt dann <u>pseudometrisierbar</u>. Sie ist mit einer Topologie <u>verträglich</u>, wenn die "<u>Kugeln</u>" $S_\varepsilon(x)$ für $x \in E$ und $\varepsilon > 0$ eine Basis der Topologie bilden $(S_\varepsilon(x) = \{y \mid (x,y) \in B_\varepsilon\} = \{y \in E \mid d(x,y) < \varepsilon\})$.

Wir werden sehen: reguläre vollnormale Räume sind uniformisierbar. Bei diesen Räumen kann man dies leichter einsehen als bei den vollständig regulären Räumen,

---

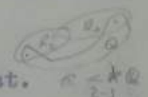
1) Δ wird die <u>Diagonale</u> (von $E\times E$) genannt.

die -wie man weiß- gerade die uniformisierbaren Räume ausmachen. Bei den regulären vollnormalen Räumen ist nämlich der Umgebungsfilter der Diagonalen Δ in der Produkttopologie eine mit der Topologie verträgliche uniforme Strucktur.

<u>4.2 Lemma:</u> Sei $(E, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum ($\mathcal{O}$ die Familie aller offenen Mengen), sei $\mathfrak{D}$ die Menge aller offenen Überdeckungen, sei Γ eine Teilmenge von $\mathfrak{D}$ und sei $\mathcal{W} = \{B_{\mathfrak{Q}} \mid \mathfrak{Q} \in \Gamma\}$, wobei $B_{\mathfrak{Q}} = \bigcup_{Q \in \mathfrak{Q}} Q \times Q$.

<u>Behauptung:</u> (i) $\mathcal{W}$ ist Basis einer uniformen Struktur, falls gilt:

(8) Zu jeder Überdeckung $\mathfrak{Q} \in \Gamma$ gibt es eine Überdeckung $\mathfrak{R} \in \Gamma$ so, daß für alle $x \in E$ $st(st(x, \mathfrak{R}), \mathfrak{R}) \subset st(x, \mathfrak{Q})$ erfüllt ist.



(9) Je zwei Überdeckungen aus Γ besitzen in Γ eine gemeinsame Verfeinerung.

(ii) Ist $\mathcal{W}$ Basis einer uniformen Struktur, dann induziert $\mathcal{W}$ auf E eine bez. $\mathcal{O}$ gröbere Strucktur $\mathcal{O}'$ (d.h. $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$).

Es ist $\mathcal{O}' = \mathcal{O}$, d.h. $\mathcal{W}$ induziert die ursprüngliche Topologie $\mathcal{O}$, falls gilt:

(10) Für jedes $x \in E$ ist $\{st(x, \mathfrak{Q})\}_{\mathfrak{Q} \in \Gamma}$ bezüglich $\mathcal{O}$ Umgebungsbasis.

<u>Beweis:</u> (i) Wir müssen prüfen, ob die Bedingungen (1) bis (4) von (4.1) erfüllt sind. Offensichtlich sind (1) und (2) erfüllt. Aus (8) ergibt sich (3), wenn man die Äquivalenz beachtet:

$(x,z) \in B_{\mathcal{R}} \circ B_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow \exists\ y \in E\colon (x,y) \in B_{\mathcal{R}}$ und $(y,z) \in B_{\mathcal{R}}$

$\Leftrightarrow \exists y \in E\ \exists R, R' \in \mathcal{R}\colon x, y \in R$ und $y, z \in R'$

$\Leftrightarrow z \in st(st(x,\mathcal{R}),\mathcal{R})$.

Daß (4) aus (9) folgt, sieht man aus:

$B_{\mathcal{R}} \subset B_{\mathcal{Q}}$,falls $\mathcal{R}$ Verfeinerung von $\mathcal{Q}$

(ii) Sei $x \in E$. Da $\{B_{\mathcal{Q}}(x)\}_{B_{\mathcal{Q}} \in \mathcal{W}}$ Umgebungsbasis von x bezüglich $\mathcal{O}'$ ist, und jedes $B_{\mathcal{Q}}(x) = st(x,\mathcal{Q})$ für $\mathcal{Q} \in \mathfrak{T}$ bezüglich $\mathcal{O}$ Umgebung ist, ist $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$. $\mathcal{O}'$ und $\mathcal{O}$ sind dann gleich, falls $\{B_{\mathcal{Q}}(x)\}_{B_{\mathcal{Q}} \in \mathcal{W}}$ bezüglich $\mathcal{O}$ Umgebungsbasis ist. $\square$

<u>4.3 Satz</u>: Sei E vollnormaler Raum.

Dann ist der Umgebungsfilter der Diagonalen Δ in der Produkttopologie eine uniforme Struktur.

Wenn E außerdem noch regulär ist, ist diese uniforme Strucktur mit der Topologie verträglich.

Beweis: Sei $\mathfrak{T}$ wie in (4.2) die Menge aller offenen Überdeckungen und $\mathcal{W} = \{B_{\mathcal{Q}} \mid \mathcal{Q} \in \mathfrak{T}\}$, wobei $B_{\mathcal{Q}} = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q \times Q$.
Jede Umgebung U der Diagonalen enthält für x einen Quader $A \times B$, wobei A und B offene Umgebungen von x sind, und auch einen Quader $Q \times Q$, wobei Q Umgebung von x ist (z.B. $Q = A \cap B$). E kann mit solchen Q's überdeckt werden, d.h. U enthält ein $\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q \times Q = B_{\mathcal{Q}}$ $(\mathcal{Q} \in \mathfrak{T})$.
Wir sehen: $\mathcal{W}$ ist Basis des Umgebungsfilters der Diagonalen. Wir zeigen: $\mathcal{W}$ erfüllt die Bedingungen (8) und (9) und, falls E noch regulär ist, auch (10).

"(8)": Ist $\mathcal{Q} \in \mathfrak{T}$,so existiert eine Sternverfeinerung $\mathcal{R} \in \mathfrak{T}$,d.h. für alle $x \in E$ ist $st(x,\mathcal{R}) \subset Q$ für ein $Q \in \mathcal{Q}$.
Für alle $x \in E$ gilt folglich:

$$st(st(x,\mathcal{R}),\mathcal{R}) = \bigcup_{x \in st(y,\mathcal{R})} st(y,\mathcal{R}) \subset \bigcup_{x \in Q \in \mathcal{Q}} Q = st(x,\mathcal{Q}).$$

"(9)": Jeder Punkt besitzt zu zwei Überdeckungen eine

Umgebung, die in einer Menge jeder dieser Überdeckungen liegt. Die Familie solcher offenen Umgebungen ist eine Verfeinerung von beiden Überdeckungen.

"(10)": Sei E nun regulär. Zu jedem Punkt $x \in E$ und zu jeder offenen Umgebung U von x können wir eine abgeschlossene Umgebung V mit $x \in V \subseteq U$ finden. Die Überdeckung $\{U, V^c\}$ hat dann die Eigenschaft, daß $st(x, \{U, V^c\}) = U$ ist. Wir sehen damit: $\{st(x, \mathcal{Q})\}_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{b}}$ ist in der Tat eine Basis des Umgebungsfilters. $\square$

Bemerkung: Dieser Satz ist mit geeigneten zusätzlichen Bedingungen umkehrbar (Corson(1958)); allerdings nicht in der Weise, wie Kelley(1955, S.208) vermutete(Corson(1959)).

Aus diesem Satz und (2.12),(2.7) und (3.6) folgt für σ-kompakte Hausdorffräume: Der Umgebungsfilter der Diagonalen ist eine mit der Topologie verträgliche uniforme Struktur. Diesen Satz unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß der Raum lokalkompakt ist, hat eine Arbeit von Lee und Mozzochi (1967) zum Inhalt.

4.4 Definition: Eine reguläre Sternentwicklung eines Raumes E ist eine abzählbare Familie $\{\mathcal{Q}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von offenen Überdeckungen, die den folgenden Bedingungen genügt:

(10) $st(x, \mathcal{Q}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist für jeden Punkt x Umgebungsbasis

(11) $st(st(x, \mathcal{Q}_{n+1}), \mathcal{Q}_{n+1}) \subset st(x, \mathcal{Q}_n)$ für alle $x \in E$ und $n \in \mathbb{N}$.

Eine reguläre Sternentwicklung erfüllt also die Bedingungen (8) bis (10) von (4.2).

Bemerkung: Die hier wiedergegebene Definition ist etwas anders als die Definition von Alexander-Urysohn(1923) für «chaîne complète et regulère». Diese verlangen statt (10) eine etwas stärkere Bedingung: für alle $n \in N$ und $A, B \in \mathcal{Q}_{n+1}$: $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B \subset C$ für ein $C \in \mathcal{Q}_n$.

Mit dieser Definition können wir eine Bedingung für die Pseudometrisierbarkeit angeben.

4.5 Satz (Alexander-Urysohn(1923)):
Ein topologischer Raum ist genau dann pseudometrisierbar, wenn er eine reguläre Sternentwicklung besitzt.

Beweis: Die Bedingung ist notwendig, denn:
Sei d eine mit der Topologie verträgliche Pseudometrik. $S_\varepsilon(x)$ bezeichne die Kugel um x mit Radius ε. Dann ist $\{\mathcal{Q}_n\}_{n \in N}$ mit $\mathcal{Q}_n = \{ S_{2^{-n}}(x) \mid x \in E\}$ eine reguläre Sternentwicklung.

Sei umgekehrt $\{\mathcal{Q}_n\}_{n \in N}$ eine reguläre Sternentwicklung. Dann ist nach (4.2)
$\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in N}$ mit $B_n = \bigcup_{G \in \mathcal{Q}_n} G \times G$ Basis einer mit der Topologie verträglichen uniformen Struktur.
Der Rest des Beweises ergibt sich aus folgendem Satz.

~~4.7~~ 4.6 Satz (Weyl(1937)): Ein uniformer Raum ist genau dann pseudometrisierbar, wenn seine uniforme Struktur eine abzählbare Basis $\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in N\}$ besitzt.

Beweis (Nach Kelley(1955)): Daß die Bedingungen notwendig sind, ist unschwer zu sehen. Setzen wir also voraus, daß $\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in N\}$ eine Basis der uniformen

Struktur sei. Da mit B_n auch $B_n \cap B_n^{-1}$ ein Element der uniformen Struktur ist, können wir ohne Einschränkung voraussetzen, daß die $B_n \in \mathfrak{B}$ symmetrisch seien (d.h. $B_n = B_n^{-1}$). Wegen (4.1 (3) und (4)) finden wir ein (symmetrisches) $V_n \in \mathfrak{B}$ mit

$$V_n \circ V_n \circ V_n \subset V_{n-1} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i \right) \quad \text{für } n \geq 1, \text{ wobei}$$

$V_o = E \times E$ sei.

Mit $\mathcal{V} = \{ V_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ erhalten wir eine Basis der uniformen Struktur mit der Eigenschaft $V_n = V_n^{-1}$ und $V_n \circ V_n \circ V_n \subset V_{n-1}$ $(n \geq 1)$.

Mit Hilfe der Funktion

$$f(x,y) = \inf \{ 2^{-n} \mid (x,y) \in V_n \in \mathfrak{B} \} \text{ (d.h.}$$

$f(x,y) \leq 2^{-n} \Leftrightarrow (x,y) \in V_n$)

können wir eine Pseudometrik auf E definieren:

$d(x,y) = \inf \{ \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i, x_{i+1}) \mid x_i \in E, \text{ wo } x_1 = x \text{ und } x_n = y \}$

Die Eigenschaften (5) bis (7) sind offensichtlich erfüllt. Da $V_n \subset \{ (x,y) \mid f(x,y) \leq 2^{-n} \} \subset \{ (x,y) \mid d(x,y) \leq 2^{-n} \}$ für $n \geq 1$, bleibt -um nachzuweisen, daß die uniforme Struktur mit der Pseudometrik verträglich ist- nur zu zeigen: für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $\{ (x,y) \mid d(x,y) < 2^{-m} \} \subset V_n$. Oder auch:

$$f(x_1, x_n) \leq 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i, x_{i+1}) \quad ;$$

denn dann folgt aus $d(x,y) < 2^{-n}$ $f(x,y) < 2.2^{-n} = 2^{-n+1}$, also $\{ (x,y) \mid d(x,y) < 2^{-n} \} \subset V_{n-1}$ für $n > 1$.

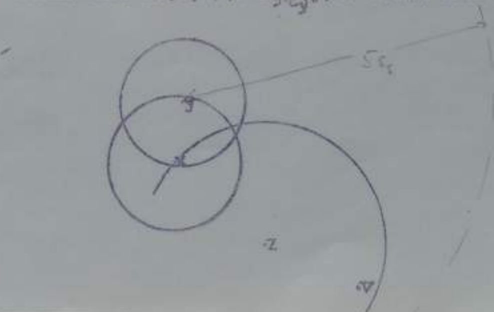
Die Ungleichung gilt für $n=1$. Sei $n > 1$ und die Ungleichung richtig für weniger als n Punkte. Wir wählen nun beliebige Punkte $x_1, \dots, x_n \in E$. Sei $\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i, x_{i+1})$ und $k = \max \{ l \mid 1 \leq l \leq n \text{ und } \sum_{i=1}^{l-1} f(x_i, x_{i+1}) \leq \frac{\alpha}{2} \}$.

Dann ist auch $\sum_{i=k+1}^{n-1} f(x_i, x_{i+1}) \leq \frac{\alpha}{2}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist folglich $f(x_1, x_k) \leq 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \alpha$ und $f(x_{k+1}, x_n) \leq \alpha$. Wir wählen m mit $2^{-m} \leq \alpha$.
Damit haben wir gezeigt: $(x_1, x_k), (x_k, x_{k+1}), (x_{k+1}, x_n)$ sind aus V_m und: $(x_1, x_n) \in V_m \circ V_m \circ V_m \subset V_{m-1}$.
Somit $f(x_1, x_n) \leq 2^{-m+1} \leq 2\alpha$. $\square$

Bevor wir uns dem Hauptsatz (4.8) dieses Paragraphen zuwenden, beweisen wir zunächst noch, daß jeder pseudometrische Raum vollnormal ist

<u>4.7 Satz</u> (Tukey(1940)): Jeder pseudometrische Raum ist vollnormal.

Beweis: Sei d eine Pseudometrik des Raumes E. $S_\varepsilon(x)$ bezeichne wieder die Kugel um x mit Radius ε. Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung. Für alle $x \in E$ existiert ein $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U$ und ein $\varepsilon_x (\varepsilon_x > 0)$ mit $S_{5 \cdot \varepsilon_x}(x) \subset U$. Wir zeigen, daß $\mathcal{V} = \{ S_{\varepsilon_x}(x) \mid x \in E \}$ Sternverfeinerung von $\mathcal{U}$ ist. Dazu wählen ein beliebiges $x \in E$ und gleich dazu ein $y \in E$ mit $\varepsilon_y > \frac{1}{2} \sup\{\varepsilon_z \mid x \in S_{\varepsilon_z}(z)\}$. Dann gilt für alle $v \in st(x, \mathcal{V})$: Es gibt ein $z \in E$ mit x und $v \in S_{\varepsilon_z}(z)$. Wir haben y so gewählt, daß $\varepsilon_z < 2 \cdot \varepsilon_y$.
Also: $d(y,v) \leq d(y,x) + d(x,z) + d(z,v) \leq \varepsilon_y + 2\varepsilon_y + 2 \cdot \varepsilon_y = 5\varepsilon_y$.
Somit ist $st(x, \mathcal{V}) \subset S_{5 \cdot \varepsilon_y}(y) \subset U$ für ein $U \in \mathcal{U}$.



$\square$

<u>4.8 Satz:</u> Ein topologischer Raum ist genau dann vollnormal, wenn jede offene Überdeckung eine Verfeinerung besitzt, die offen bezüglich einer pseudometrisierbaren Topologie ist.

Beweis: Daß die Bedingung hinreichend ist, folgt aus dem vorangegangenen Satz. Um darzutun, daß sie auch notwendig ist, setzen wir voraus, daß der Raum $(E, \mathcal{O})$ vollnormal und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung sei. Wir können eine Folge $\{\mathfrak{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von offenen Überdeckungen so bilden, daß $\mathfrak{A}_1$ Sternverfeinerung von $\mathcal{U}$ ist und für $n \geqslant 1$ $\mathfrak{A}_{n+1}$ Sternverfeinerung von $\mathfrak{A}_n$ ist. Nach (4.2 (i) und (ii)) ist $\mathcal{W} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $B_n = \bigcup_{G \in \mathfrak{A}_n} G \times G$ Basis einer uniformen Struktur, die auf E eine gröbere Topologie $\mathcal{O}'$ induziert. Nach (4.6) ist die uniforme Struktur, also auch $\mathcal{O}'$, pseudometrisierbar. Bezüglich $\mathcal{O}'$ ist $st(x, \mathfrak{A}_1) = B_1(x)$ Umgebung, enthält mithin eine bezüglich $\mathcal{O}'$ offene Menge V_x. Da $\mathfrak{A}_1$ Sternverfeinerung von $\mathcal{U}$ ist, ist für $x \in E$ $V_x \subset st(x, \mathfrak{A}_1) \subset U$ für ein $U \in \mathcal{U}$. Somit: $\{V_x \mid x \in E\}$ ist Verfeinerung von $\mathcal{U}$. $\square$

Als unmittelbare Folgerung sei erwähnt:

<u>4.9 Satz</u> (Arens-Dugundji(1950)): Ein vollnormaler Raum ist genau dann kompakt, wenn er abzählbar kompakt ist.

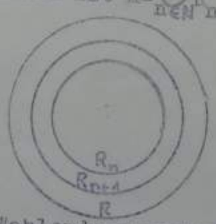
Beweis: Jeder pseudometrisierbare abzählbar kompakte Raum ist kompakt. Wir müssen zeigen, daß dies auch für vollnormale Räume gilt. Sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung

Überdeckung und $\{V_j\}_{j\in J}$ eine Verfeinerung von $\{U_i\}_{i\in I}$ mit $V_j \subset U_{\sigma(j)}$ $(j\in J;\ \sigma(j)\in I)$, die offen bezüglich einer pseudometrisierbaren gröberen Topologie $\mathcal{O}'$ sei. Auch $(E,\mathcal{O}')$ ist abzählbar kompakt, somit auch kompakt. $\{V_j\}_{j\in J}$ besitzt also eine endliche Teilüberdeckung $\{V_{j_1},\dots,V_{j_n}\}$. Mit $\{U_{\sigma(j_1)},\ \dots,\ U_{\sigma(j_n)}\}$ haben wir eine endliche Teilüberd. von $\{U_i\}_{i\in I}$ erhalten. $\square$

5. Der Satz von A.H. Stone

5.1 Satz: Jeder pseudometrische Raum besitzt zu jeder Überdeckung eine σ-diskrete Verfeinerung.

Beweis: Wir folgen Kelley(1955, S.129): Werde mit d die Pseudometrik bezeichnet. Sei $\mathcal{R}$ offene Überdeckung. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß $\mathcal{R}$ aus Kugeln, d.h. Mengen der Form $S_\varepsilon(x)=\{y\in E \mid d(x,y)<\varepsilon\}$ bestehe. Für alle $R\in\mathcal{R}$ und $n\in\mathbb{N}$ bilden wir $R_n=\{x\in R \mid d(x,R^c)\geq \frac{1}{2^n}\}$,d.h. wir verkleinern den Radius von R um den Betrag $1/2^n$. Dann ist $R=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n$ und $d(R_n,R^c_{n+1})\geq \frac{1}{2^{n+1}}$.

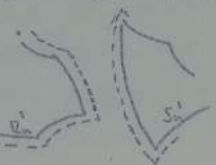


Sei $\prec$ eine Wohlordnung von $\mathcal{R}$ (Wohlordnungssatz!). Wir setzen für alle $R\in\mathcal{R}$ und $n\in\mathbb{N}$:

$R'_n = R_n \cap (\bigcap_{S\prec R} S^c_{n+1})$. Dann gilt für alle

R und S $(R \neq S)$: $R_n' \subset S_{n+1}^c$ oder $S_n' \subset R_{n+1}^c$, je nachdem ob $S \prec R$ oder $R \prec S$, in beiden Fällen jedenfalls $d(S_n', R_n') \geq \frac{1}{2^{n+1}}$, d.h $\mathcal{R}_n' = \{R_n' \mid R \in \mathcal{R}\}$ ist diskret, denn jede beliebige Kugel vom Radius $\leq \frac{1}{2^{n+1}}$ trifft höchstens ein $R_n' \in \mathcal{R}_n'$.

Die Vereinigung aller $\mathcal{R}_n'$ ist eine Überdeckung: denn für $x \in E$ und $R = \min_{\prec} \{S \mid x \in S \in \mathcal{R}\}$ ist $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n'$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Der Beweis ist fertig wenn wir jedes R_n' der diskreten Familie $\mathcal{R}_n'$ in ein offenes R_n^* so einbetten können, daß $\{R_n^* \mid R \in \mathcal{R}\}$ noch diskret bleibt. (Das ist nicht schwer, so daß wir darauf verzichten können, (4.7) und (3.4) anzuwenden.) Sei R_n^* die Vereinigung aller Kugeln vom Radius $\frac{1}{2^{n+3}}$ um Punkte von R_n', d.h. $R_n' = \{y \in E \mid d(y, R_n') < \frac{1}{2^{n+3}}\}$. $\mathcal{R}_n^* = \{R_n^* \mid R \in \mathcal{R}\}$ ist dann diskret, denn jede Kugel vom Raduus $\frac{1}{2^{n+1}}$ trifft höchstens ein $R_n^* \in \mathcal{R}_n^*$.



$\square$

Überdeckung

Da jede σ-diskrete Basis σ-lokalendlich ist, folgt aus (2.8 (ii)):

<u>5.2 Korollar</u> 1 (Stone(1948)): Jeder pseudometrische Raum ist parakompakt.

Als Folgerung von (4.8) erhalten wir, was Stone für reguläre vollnormale Räume bewies:

5.3 Korollar2: Jeder vollnormale Raum ist parakompakt.

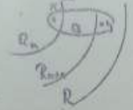
Bemerkenswert ist die Existenz von σ-diskretenVerfeinerungen. Ein Beispiel, wie diese Eigenschaft angewendet wird, wird in §8 gegeben. Für vollnormale Räume ergibt sie sich aus (5.1) und (4.8):

5.4 Korollar 3:(Stone(1948)): In einem vollnormalen Raum gibt es zu jeder offenen Überdeckung eine σ-diskrete Verfeinerung.

Bemerkung: Tukey(1940, S.84) schreibt: "Metrizability is of uncertain importance;a large part of its present position may come from its implication of full normality".Dieser Eindruck erhärtet sich, wenn man in (5.1) den Beweis, der scheinbar wesentlich von einer Abstandsfunktion abhängt, nocheinmal für vollnormale Räume durchführt. Man kann sich in diesem Fall ebenfalls gut von der Anschauung leiten lassen.

Direkter Beweis von 5.4:(Wir halten uns an den Beweis von (5.1) und werden sehen, daß man sich im vorliegendem Fall nicht viel neues mehr einfallen lassen braucht.) Sei $\mathcal{Q}$ offene Überdeckung. Wir bilden eine Folge $\{\mathcal{Q}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von offenen Überdeckungen so, daß $\mathcal{Q}_1$ Sternverfeinerung von $\mathcal{Q}$ ist und für $n\in\mathbb{N}$ $\mathcal{Q}_{n+1}$ Sternverfeinerung von $\mathcal{Q}_n$ ist. Für alle $R\in\mathcal{Q}$ setzen wir $R_n = \{ y\in R \mid st(y, \mathcal{Q}_n) \subset R \}$.
Da für alle $n\in\mathbb{N}$ $\mathcal{Q}_n$ Sternverfeinerung von $\mathcal{Q}$ ist, ist $\{R_n \mid R\in\mathcal{Q}\}$ Überdeckung. Für alle $Q \in \mathcal{Q}_{n+1}$ $(n\in\mathbb{N})$

gilt: Q trifft nicht R_n und R^c_{n+1} zugleich.
(Gäbe es $x \in R_n$ und $y \in R^c_{n+1}$ mit $x, y \in Q$, dann wäre
$x \in st(y, \mathcal{R}_{n+1}) \subset st(x, \mathcal{R}_n) \subset R$.



Also wäre $y \in R_{n+1}$).

Sei $\prec$ Wohlordnung auf $\mathcal{R}$. Setze

$R'_n = R_n \cap (\bigcap_{S \prec R} S^c_{n+1})$ $(R \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N})$. Für $R \neq S$ folgt: $R'_n \subset S^c_{n+1}$ oder $S'_n \subset R^c_{n+1}$. In beiden Fällen erhalten wir: Jedes Element Q der Überdeckung $\mathcal{R}_{n+1}$ trifft nicht R'_n und S'_n zugleich. Die Familie $\{R'_n \mid R \in \mathcal{R}\}$ ist also diskret. Die σ-diskrete Familie $\mathcal{R}' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}'_n$ ist Überdeckung; denn für $x \in E$ und $R = \min\{S \in \mathcal{R} \mid x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n\}$ ist $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R'_n$. Wir betten jedes R'_n in die offene Menge $R^*_n = st(R'_n, \mathcal{R}_{n+3})$ und wissen von (3.4), daß $\mathcal{R}^*_n = \{R^*_n \mid R \in \mathcal{R}\}$ ebenfalls diskret ist. (Genauer: Jedes Element von $\mathcal{R}_{n+3}$ trifft höchstens ein R^*_n) $\square$

Wir fassen zusammen:

<u>5.$\overset{5}{4}$ Satz:</u> Sei E ein topologischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig.

(i) E ist parakompakt und normal.

(ii) Jede offene Überdeckung besitzt eine abgeschlossene $\overset{lle}{}$ Verfeinerung.

(iii) E ist vollnormal.

Beweis: "(i) $\Rightarrow$ (ii)": (2.7).

"(ii) $\Rightarrow$ (iii)": (3.6)

"(iii) $\Rightarrow$ (i)": (5.3) und (3.5). $\square$

Bemerkung: Der Satz von A.h.Stone, "der eine der tiefsten und interessantesten Eigenschaften der parakompakten Räume zeigt" (Alexandroff(1960,a)), kann -wie es scheint- nicht ohne das Auswahlaxiom bewiesen werden.

Frage: Ist der Satz von A.H.Stone mit dem Auswahlaxiom gleichwertig?

6.Weitere Metrisierbarkeitssätze

6.1 Satz: Ein topologischer Raum ist genau dann pseudometrisierbar, wenn er vollnormal ist und gilt:

(12) Allen Punkten $x \in E$ sind Umgebungsbasen $\{B_n(x)\}_{n\in N}$ zugeordnet, die im folgendem Sinn "lokal symmetrisch" seien: Für alle $n \in N$ und $x \in E$ gibt es eine Umgebung U von x mit: $y \in U \Rightarrow U \subset B_n(y)$.

Beweis: Jeder pseudometrische Raum ist vollnormal (4.7) und besitzt solche Umgebungsbasen. Z.B. $\{S_{2^{-n}}(x)\}_{n \in N}$ Dann gilt für $U = S_{2^{-n-1}}(x)$: $y \in U \Rightarrow U \subset S_{2^{-n}}(y)$.

Sei nun E ein vollnormaler Raum, in dem jedem Punkt $x \in E$ eine solche Umgebungsbasis $\{B_n\}_{n \in N}$ zugeordnet sei. Für $n \in N$ bestehe $\mathcal{A}_n$ aus offenen Umgebungen U von x, für die gilt: $y \in U \Rightarrow U \in B_n(y)$ $(x \in E)$. Dann gilt für alle $x \in E$: $st(x, \mathcal{A}_n) \subset B_n(x)$.

Wir konstruiren nun eine reguläre Sternentwicklung $\{\mathcal{Q}_n\}_{n \in N}$ und damit ist gezeigt, daß E pseudometrisierbar ist (4.5).

Setze $\mathcal{Q}_1=\mathcal{A}_1$. Ist $\mathcal{Q}_n$ schon konstruiert, dann wähle man eine offene Sternverfeinerung $\mathcal{B}$ von $\mathcal{Q}_n$ und setze $\mathcal{Q}_{n+1}=\{B\cap A \mid B\in\mathcal{B};\ A\in\mathcal{A}_{n+1}\}$. Dann ist $\mathcal{Q}_{n+1}$ wieder Sternverfeinerung von $\mathcal{Q}_n$ und damit

$$st(st(x,\mathcal{Q}_{n+1}),\mathcal{Q}_{n+1}) \subset st(x,\mathcal{Q}_n)$$

und außerdem

$$st(x,\mathcal{Q}_{n+1}) \subset st(x,\mathcal{A}_{n+1}) \subset B_{n+1}(x).$$

Man sieht: Die Folge $\{\mathcal{Q}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von offenen Überdeckungen erfüllt die Bedingungen (10) und (11) von (4.4) für eine reguläre Sternentwicklung. $\square$

<u>6.2 Korollar</u>: Besitzt ein vollnormaler Raum eine σ-punktendliche Basis $\mathcal{B}=\{\mathcal{B}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (d.h. für alle $n\in\mathbb{N}$ und für alle $x\in E$: x liegt nur in endlich vielen Elementen von $\mathcal{B}_n$).

Dann ist der Raum pseudometrisierbar.

Beweis: Für alle $n\in\mathbb{N}$ und $m\in\mathbb{N}$ setze man:

$$\mathcal{A}_{n,m}=\{B_1\cap\ldots\cap B_m \mid B_i\in\mathcal{B}_n \text{ und } B_i\neq B_j \text{ für } i\neq j\}$$

$\mathcal{A}=\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_{n,m}$ ist ebenfalls σ-punktendlich.

Ist $x\in E$ und U Umgebung von x, dann gibt es $n\in\mathbb{N}$ und $B\in\mathcal{B}_n$: $x\in B\subset U$. Sei $\{B_1,\ldots,B_m\}=\{B\in\mathcal{B}_n \mid x\in B\}$.

Dann ist $st(x,\mathcal{A}_{n,m}) = B_1\cap\ldots\cap B_m\subset B\subset U$.

Wir haben gezeigt: $\{st(x,\mathcal{A}_{n,m})\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ ist Umgebungsbasis von x.

Sei $n,m\in\mathbb{N}$. Dann gilt für $x\in E$ und für $U:=\bigcap_{x\in A\in\mathcal{A}_{n,m}} A$:

$y\in U \Rightarrow U\subset st(y,\mathcal{A}_{n,m})$.

Die Umgebungsbasen $st(x,\mathcal{A}_{n,m})$ erfüllen die Voraussetzungen des vorigen Satzes, $\square$

Damit können wir den klassischen Metrisierbarkeitssatz von Bing(1951), Nagata(1950) und Smirnov(1951) beweisen.

<u>6.3 Satz</u>: Für die Pseudometrisierbarkeit eines regulären topologischen Raumes ist notwendig:
Er besitzt eine σ-diskrete Basis. Und hinreichend:
Er besitzt eine σ-lokalendliche Basis.

Beweis: (i) Sei E ein pseudometrischer Raum mit einer Abstandfunktion d. E ist vollnormal. Deshalb besitzt wegen (5.4) $\mathcal{B}_n = \{B_n(x)\}_{x\in E}$, wobei $B_n(x)$ die Kugel um x mit Radius 2^{-n} sei, eine σ-diskrete Verfeinerung $\mathcal{B}_n' = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_{n,m}$, wobei $\mathcal{A}_{n,m}$ diskret sei. Die Vereinigung $\mathcal{A} = \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_{n,m}$ ist σ-diskrete Basis, denn: wenn $x \in A \in \mathcal{A}_{n+1,m}$, dann ist $A \subset B_n(x)$.

(ii) Sei E ein topologischer Raum mit einer σ-lokalendlichen Basis. Dann besitzt jede offene Überdeckung eine Verfeinerung aus der Basis. Diese Verfeinerung ist dann notwendig σ-lokalendlich. E ist also nach (2.8 (ii)) parakompakt, also vollnormal und wegen (6.2) pseudometrisierbar. $\square$

Archangelski brachte einen weiteren Fortschritt im Metrisierbarkeitsproblem. Er stützte sich dabei auf Untersuchungen von Alexandroff(1960,b).

6.4 Lemma (Alexandroff(1960,b)):

Sei $\mathfrak{B}$ eine Familie offener Mengen eines topologischen Raumes E. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig.

(i) Für einen Punkt $x \in E$ und eine Umgebung U von x gilt: U enthält fast alle Elemente von $\mathfrak{B}$, die x enthalten.

(ii) Jede unendliche Menge von Elementen aus $\mathfrak{B}$, die einen Punkt $x \in E$ enthalten bilden eine Umgebungsbasis.

Beweis: "(i) $\Rightarrow$ (ii)": Sei eine unendliche Menge von Elementen aus $\mathfrak{B}$ gegeben, die x enthalten. Jede Umgebung U von x enthält dann fast alle Elemente dieser Menge, also mindestens eines, d.h. diese Menge ist Umgebungsbasis für x.

"(ii) $\Rightarrow$ (i)": Gäbe es ein $x \in E$ und eine Umgebung von x, die nicht fast alle Elemente von $\mathfrak{B}$ enthielte, dann gäbe es eine unendliche Menge von Elementen aus $\mathfrak{B}$, von denen keines in U läge, woraus folge, daß sie keine Basis wäre. $\square$

Wir nennen eine Basis eines topologischen Raumes regulär, wenn sie eine reguläre Überdeckung (S.23) ist.

Eine Basis ist also regulär, wenn zu jedem Punkt und zu jeder Umgebung U von ihm eine Umgebung V von ihm so existiert, daß $U^c \cap B = \emptyset$ oder $V \cap B = \emptyset$ für fast alle Elemente B dieser Basis.

<u>6.5 Lemma</u>: Sei E ein T_1-Raum, der eine reguläre Basis besitzt. Dann ist E regulär.

Beweis: Sei $\mathfrak{B}$ eine reguläre Basis. Zu einem beliebigen Punkt x und zu einer beliebigen Umgebung U von ihm können wir eine Umgebung V so finden, daß $V \cap B = \emptyset$ oder $U^c \cap B = \emptyset$ für fast alle $B \in \mathfrak{B}$ ist. Wir zeigen, daß dann $V^- \subset U^o$ ist. Sei $x \in V^-$. Dann gibt es nur endlich viele $B_i \in \mathfrak{B}$, die x enthalten, und U^c schneiden ($i = 1, \ldots, n$) . Es gibt $B \in \mathfrak{B}$ mit $x \in B \subset B_1 \cap \ldots \cap B_n$. Ist $B \subset U$, dann ist nichts mehr zu zeigen. Ist $y \in B \cap U^c$ dann gibt es -da E T_1-Raum- ein $B' \in \mathfrak{B}$ mit $x \in B' \subset B$ und $y \notin B'$. Dann ist $B' \notin \{B_1, \ldots, B_n\}$, also $B' \subset U$. $\square$

<u>6.6 Satz</u> (Archangelski(1960)): Ein normaler, regulärer oder T_1-Raum ist genau dann pseudometrisierbar, wenn er eine reguläre Basis besitzt.

Beweis: (i) Sei E pseudometrischer Raum. $S_\varepsilon(x)$ bezeichne -wie üblich- die Kugel um x mit Radius ε. In die Überdeckungen $\mathfrak{B}'_n = \{ S_{2^{-n}}(x) \mid x \in E \}$ können wir lokalendliche Überdeckungen $\mathfrak{B}_n$ einbeschreiben (5.2). Die Basis $\mathfrak{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{B}_n$ ist regulär; denn für $x \in E$ und eine Umgebung U von x gibt es $n \in \mathbb{N}$ so, daß $S_{2^{-n}}(x) \subset U$ ist und eine Umgebung V von x so, daß $V \subset S_{2^{-n-1}}(x)$ und V nur endlich viele $B \in \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathfrak{B}_i$ trifft. Jedes $S_{2^{-n-2}}(y)$ $(y \in E)$ trifft nicht $S^c_{2^{-n}}(x)$ und $S_{2^{-n-1}}(x)$ zugleich. Infolgedessen trifft auch jedes $B \in \bigcup_{i=n+2}^{\infty} \mathfrak{B}_i$ nich U^c und V zugleich.

(ii) Besitze E eine reguläre Basis $\mathcal{B}$. Dann kann man jede offene Überdeckung zu einer regulären Überdeckung (mit Elementen aus der Basis) verfeinern. E ist also parakompakt (2.15) .Ist E ein T_1-Raum, dann ist er auch regulär (6.5), ist er regulär, dann ist er auch normal (2.5). Wir können also voraussetzen, daß E vollnormal ist (5.5). Wir konstruieren nun eine Folge von lokalendlichen offenen Familien $\mathcal{A}_n$ und zeigen, daß sie zusammen eine Basis ergeben. Wegen (6.2) ist der Raum dann pseudometrisierbar. Als $\mathcal{A}_1$ wählen wir die lokalendliche Familie der maximalen Elemente von $\mathcal{B}$(2.14). $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B} - \mathcal{A}_1$ ist dann eine reguläre Überdeckung von $E_1 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} B$ .Wir beobachten: Ist ein Punkt $x \notin E_1$, dann gibt es ein $B \in \mathcal{A}_1$ so, daß $\{B\}$ Umgebungsbasis (von nur einem Element) von x ist. Nun wählen wir als $\mathcal{A}_2$ die (bezüglich E_1 und E) lokalendliche Familie der maximalen Elemente von $\mathcal{B}_1$. Auf diese Art erhalten wir eine Folge von lokalendlichen Familien $\mathcal{A}_n$. Sei $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ die Vereinigung dieser Familie. Für einen Punkt $x \in E$ gilt: Entweder existiert $B \in \mathcal{A}$ mit $\{B\}$ ist Umgebungsbasis oder es existiert eine unendliche Menge von Elementen aus $\mathcal{A}$,die x enthalten. Diese unendliche Menge von Umgebungen von x ist wegen (6.4) eine Umgebungsbasis. Mit $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ haben wir also eine σ-lokalendliche Basis erhalten. $\square$

Bemerkungen: (i) Jede reguläre Basis besitzt eine lokalendliche Teilüberdeckung. Räume, in denen dies für jede Basis gilt, nennt man total parakompakt (vgl. Lelek(1968)).

(ii) Weitere Metrisierbarkeitssätze in dieser Art und Folgerungen findet man in Archangelski(1961),(1962) und Chaban(1967).

(iii) Wie nach dem Metrisierbarkeitssatz von Bing-Nagata-Smirnov werden auch jetzt mit Hilfe dieser neuen Metrisierbarkeitssätze Forschungen in der Dimensionstheorie gemacht. Eine neue Definition der Dimension von Archangelski untersucht Egorov(1968).

7. Parakompakte und lokalkompakte Räume

7.1 Satz (z.B. Hewitt und Ross(1963))

Jede lokalkompakte Gruppe G ist parakompakt

Beweis: Wir zeigen, daß G eine offene lindelöfsche Untergruppe L besitzt. Da G dann von den Nebenklassen von L überdeckt wird und da jede topologische Gruppe regulär ist, können wir (2.10) anwenden.

Sei U eine Umgebung des Einselementes der Gruppe, deren Abschluß kompakt ist. Dann ist auch der Abschluß von $U^2 = U \cdot U = \{xy \mid x, y \in U\}$ als stetiges Bild der kompakten Menge $U^- \times U^-$ und analog auch der Abschluß von U^n $(n=1,2,\ldots)$ kompakt. Beachtet man, daß $U^- \subset U \cdot U$ ist, sieht man, daß $L = \bigcup_{n \in N} U^n$ eine σ-kompakte (und damit lindelöfsche) offene Untergruppe von G ist. $\square$

In lokalkompakten Räumen kann man aus der Parakompaktheit eine stärkere Eigenschaft folgern.

Eine Überdeckung ist <u>sternendlich</u>, wenn jedes Element von ihr nur endlich viele weitere Elemente der Überdeckung trifft.

<u>7.2 Satz</u>: Jeder lokalkompakte parakompakte Raum ist <u>hypokompakt</u>, d.h. jede offene Überdeckung besitzt eine offene sternendliche Verfeinerung.

Beweis: Ist U eine kompakte Umgebung von $x \in E$, dann ist der Abschluß jeder Umgebung von x, die in U enthalten ist, ebenfalls kompakt.

Sei $\mathfrak{O}$ offene Überdeckung des lokalkompakten parakompakten Raumes E. Mit der eben gemachten Bemerkung können wir $\mathfrak{O}$ zu einer offenen Überdeckung $\mathfrak{B}$ so verfeinern, daß der Abschluß B^- jeder Menge $B \in \mathfrak{B}$ kompakt ist. Sei $\mathcal{A}$ eine offene lokalendliche Verfeinerung von $\mathfrak{B}$. Der Abschluß jeder Menge $A \in \mathcal{A}$ ist dann ebenfalls kompakt. Wir zeigen, daß $\mathcal{A}$ sternendlich ist.

Da $\mathcal{A}$ lokalendlich ist, können wir zu jedem $x \in E$ eine Umgebung U_x und endlich viele Mengen $A_1^x, \ldots, A_{l_x}^x$ von $\mathcal{A}$ so wählen, daß U_x mit allen übrigen Elementen von $\mathcal{A}$ leeren Durchschnitt hat. Zu jedem $A \in \mathcal{A}$ können wir, da A^- kompakt ist, endlich viele Punkte $x_1(A), \ldots, x_{m_A}(A)$ so wählen, daß $A^- \subset \bigcup_{i=1}^{m_A} U_{x_i(A)}$ ist.
Sei $A \in \mathcal{A}$. Wir zeigen: Es existieren nur endlich viele $A' \in \mathcal{A}$ mit $A \cap A' \neq \emptyset$. Dazu nehmen wir an, daß $A \cap A'$ $\neq \emptyset$ für ein $A' \in \mathcal{A}$ sei. Dann existiert, da $A \cap A'$

$\subset A' \cap (\bigcup_{i=1}^{m_A} U_{x_i}(A))$, $y \in \{x_1(A), \ldots, x_{m_A}(A)\}$ so, daß $A' \cap U_y \neq \emptyset$. Dan ist nur möglich, wenn $A' \in \{A_1^y, \ldots, A_{n_y}^y\}$. Somit haben wir gezeigt, daß $A \cap A' = \emptyset$ für alle $A' \in \mathcal{A} - \{A_i^y \mid y \in \{x_1(A), \ldots, x_{m_A}(A)\}\ ;\ i \in \{1, \ldots, n_y\}\}$. $\square$

Bemerkung: Eine weitere Klasse hypokompakter Räume beschreibt Iseki (1953). Mit hypokompakten Räumen beschäftigt sich auch Yasui (1968).

8. Lokale Eigenschaften vollnormaler Räume

Eine wichtige Besonderheit können wir bei vollnormalen Räumen feststellen: Besitzt er eine Eigenschaft lokal, so besitzt er unter gewissen Voraussetzungen diese Eigenschaft auch insgesamt. Der Schlüssel hierzu liegt in dem folgenden Satz.
cf. auch Singal, M. K.; S. P. Arya, Israel J. Math. 8, 155–158 (1970)

8.1 Satz (Michael(1954)): Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung des vollnormalen Raumes E. Sie enthalte jede ihrer offenen Verfeinerungen und sei abgeschlossen bezüglich der Vereinigung endlicher und diskreter Familien. d.h. $\mathcal{U}$ ist Ideal (bez. $\subset$) und ist auch abgeschl. bez. Vereinigung diskreter Teilfamilien.
Dann ist E in $\mathcal{U}$ enthalten.

Beweis: Wir bilden in den folgenden sechs Schritten, die alle bis auf den vierten sofort einsichtig sind, nur Verfeinerungen von $\mathcal{U}$ oder Vereinigungen endlicher oder diskreter Familien von $\mathcal{U}$, erhalten also stets

Elemente aus $\mathcal{U}$.

(i) Wir wählen eine offene σ-diskrete Verfeinerung $\mathcal{A}=\bigcup_{n\in N}\mathcal{A}_n$, wobei für alle $n\in N$ $\mathcal{A}_n$ diskret sei.

(ii) Wir bilden durch Vereinigung der diskreten Familien $\mathcal{A}_n$ eine abzählbare Überdeckung $\{B_n\}_{n\in N}$ ($B_n=\bigcup\{A \mid A\in\mathcal{A}_n\}$).

(iii) Durch Vereinigung der endlichen Familien $\{B_i\}_{i=1,\ldots,n}$ erhalten wir eine abzählbare Familie $\{C_n\}_{n\in N}$ ($C_n=\bigcup_{i=1}^{n} B_i$) mit $C_1\subset C_2\subset\ldots$.

(iv) Dieser Schritt ist der einzig nichttriviale. Wir wollen eine Verfeinerung von $\{C_n\}_{n\in N}$ erhalten, die sich als Vereinigung von drei diskreten Familien $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ und $\mathcal{D}_3$ schreiben läßt.

Zunächst bilden wir eine Folge $\{\mathcal{Q}_n\}_{n\in N}$ von offenen Überdeckungen so, daß $\mathcal{Q}_1$ Sternverfeinerung von $\{C\}$ ist, und für $n\in N$ $\mathcal{Q}_{n+1}$ Sternverfeinerung von $\mathcal{Q}_n$.

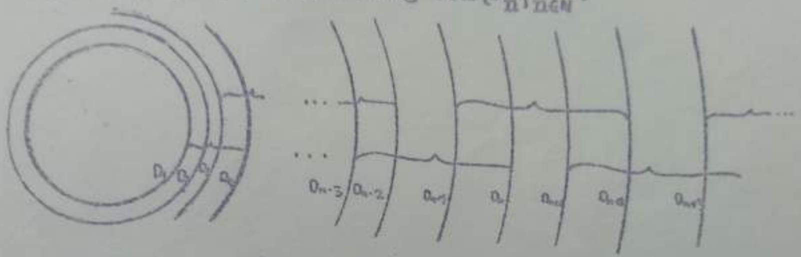
Setze $D_n=\{x\in C_n \mid st(x,\mathcal{Q}_n)\subset C_n\}$. Da für alle $n\in N$ $\mathcal{Q}_m$ Sternverfeinerung von $\{C_n\}_{n\in N}$ ist, gilt für alle $x\in E$: $st(x,\mathcal{Q}_m)\subset C_n$ für ein $n\in N$, also für $k=\max\{n,m\}$: $st(x,\mathcal{Q}_k)\subset st(x,\mathcal{Q}_m)\subset C_n\subset C_k$. Wir sehen, daß $\{D_n\}_{n\in N}$ Überdeckung ist.

Für $n\in N$ gibt es kein $R\in\mathcal{Q}_{n+1}$, das D_n und D_{n+1}^c gleichzeitig trifft; denn: Ist $x\in D_n$ und $R\in\mathcal{Q}_{n+1}$ mit $x\in R$, Dann gilt für alle $y\in R$:

$st(y,\mathcal{Q}_{n+1})\subset st(st(x,\mathcal{Q}_{n+1}),\mathcal{Q}_{n+1})\subset st(x,\mathcal{Q}_n)\subset C_n\subset C_{n+1}$, also $y\in D_{n+1}$.

Die Familien $\{D_n-D_{n-3} \mid n=0 \bmod 4;\ n>0\}$ und $\{D_{n+2}-D_{n-1} \mid n=2 \bmod 4;\ n>0\}$ sind also diskret.

Wir können sie in offene diskrete Familien $\mathscr{D}_1$ und $\mathscr{D}_2$ einbetten (3.4). Die Elemente von $\mathscr{D}_1$ und $\mathscr{D}_2$ seien (ohne Eischränkung) in einem Element von $\{D_n\}_{n\in N}$ enthalten. Fügen wir noch $\mathscr{D}_3=\{D_1\}$ (als Familie von nur einem Element) hinzu, so erhalten wir mit den drei diskreten Familien $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2$ und $\mathscr{D}_3$ (, die E überdecken) eine Verfeinerung von $\{D_n\}_{n\in N}$.



(v) Setze $F_i=\bigcup\{D \mid D\in\mathscr{D}_i\}$ $(i=1,2,3)$. Die Überdeckung $\{F_i\}_{i=1,2,3}$ ensteht durch Vereinigungen diskreter Familien.

(vi) Dann ist $E=F_1\cup F_2\cup F_3$. □

Ein topologischer Raum E besitzt eine Eigenschaft $\mathcal{E}$ <u>lokal</u>, wenn jeder Punkt eine Umgebung mit dieser Eigenschaft $\mathcal{E}$ hat.

<u>8.2 Korollar</u>: Besitze ein vollnormaler Raum E eine Eigenschaft $\mathcal{E}$ lokal und gälte:

(i) Sind zwei offene Mengen A und B in Mengen U und V enthalten, die die Eigenschaft $\mathcal{E}$ besitzen, dann ist auch $A\cup B$ in einer Menge W enthalten, die $\mathcal{E}$ besitzt.

(ii) Ist $\{A_i\}_{i\in I}$ eine offene diskrete Familie und jedes A_i in einer Menge enthalten, die $\mathcal{E}$ besitzt, dann ist auch $\bigcup_{i\in I} A_i$ in einer Menge enthalten, die $\mathcal{E}$ besitzt.

Behauptung: Der ganze Raum E besitzt des Eigenschaft $\mathcal{E}$.

Beweis: $\mathcal{U} = \{A \subset E \mid A$ offen und $A \subset U$ für eine Menge $U \subset E$, die die Eigenschaft $\mathcal{E}$ besitzt$\}$ erfüllt die Voraussetzungen des vorigen Satzes. //

8.3 Beispiele:

a) Jeder lokal pseudometrisierbare Raum ist pseudometrisierbar, falls er vollnormal ist.[1)]

Beweis: Wir benützen eine topologische Charakterisierung der Pseudometrisierbarkeit, etwa die von Archangelski (6.6). Besitzt jedes Element A_i einer offenen Familie $\{A_i\}_{i\in I}$ eine reguläre Basis $\mathcal{A}_i$, so besitzt auch -falls I endlich oder $\{A_i\}_{i\in I}$ diskret ist- $\bigcup_{i\in I} A_i$ eine reguläre Basis, nämlich $\bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i$.

b) Hier sei noch ein Beispiel aus der geometrischen Topologie angeführt (vgl. Brown(1960)):

Eine Teilmenge A von E hat einen Bikragen, wenn ein Homöomorphismus h von $A\times(-1,+1)$ auf eine offene Menge $U \supset A$ so existiert, daß $h(a,0) = a$ für alle $a\in A$ gilt. Man kann beweisen, daß die Vereinigung von zwei Mengen, die einen Bikragen haben, ebenfalls einen Bikragen haben, falls sie metrisierbar sind. Mit Hilfe unseres Satzes kann nun leicht bewiesen werden, daß eine Teilmenge eines metrischen Raumes, die lokal einen Bikragen besitzt, einen Bikragen besitzt. Aus diesem Resultat

1) Smirnov(1951)

und dem "verallgemeinerten Satz von Schönfließ" von Morton Brown und M. Morse folgt der wichtige Satz:

Satz (M. Brown): Eine $(n-1)$-Sphäre im E^n, die lokal einen Bikragen besitzt, kann mit Hilfe eines Autohomöomorphismus des E^n auf die Einheitsspäre abgebildet werden.[1]

c) [illegible] (1961) (nach Engelking p. 236):
E kp. & lk. [illegible] in einer Zelle ⇒ E [illegible] in einer Zelle

9. Partition der Eins

Eine Partition der Eins ist eine Familie $\mathcal{F}$ von stetigen Funktionen von einem topologischen Raum E in das Einheitsintervall so, daß für alle $x \in E$ (fast alle $f \in \mathcal{F}$ in einer passenden Umgebung von x verschwinden und) $\sum_{f \in \mathcal{F}} f(x) = 1$ ist. (vgl. 16.12.71,1)

Eine Partition der Eins ist der Überdeckung $\mathcal{R}$ untergeordnet, wenn für jedes $f \in \mathcal{F}$ der Träger $Tr(f) = \overline{\{x \in E \mid f(x) \neq 0\}}$ in einem $R \in \mathcal{R}$ enthalten ist.

Ein vor allem für die Anwendungen wertvoller Satz garantiert, daß man stetige Funktionen auf Funktionen zurückführen kann, die außerhalb gegebener offenen Mengen verschwinden.

9.1 Satz (z.B. Schubert (1964, S. 86)):

Ein Raum E ist genau dann vollnormal, wenn jede offene Überdeckung eine ihr untergeordnete Partition der Eins besitzt.

---

1) $E^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \text{ reell}\}$

Beweis: (i) Sei $\mathcal{O}$ eine offene Überdeckung und $\mathcal{F}$ eine ihr untergeordnete Partition der Eins. Dann ist $\mathcal{A}=\{A_f \mid f\in\mathcal{F}\}$ mit $A_f=\{x\in E \mid f(x)\neq 0\}$ eine lokalendliche Überdeckung. Nach (2.2) ist auch $\mathcal{B}=\{A^- \mid A\in\mathcal{A}\}$ lokalendlich. Da der Träger $A_f^-=Tr(f)$ einer jeden Funktion $f\in\mathcal{F}$ in einem $R\in\mathcal{O}$ liegt, ist $\mathcal{B}$ eine lokalendliche abgeschlossene Verfeinerung von $\mathcal{O}$. Besitzt also jede offene Überdeckung eine ihr untergeordnete Partition der Eins, so ist wegen (5.5) der Raum vollnormal.

(ii) Sei E vollnormal.

Sei $\{V_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von E. Sie besitzt eine abgeschlossene Verfeinerung $\{A_i\}_{i\in I}$ mit $A_i\subset V_i$ (2.7). Da E normal ist (3.5), existiert für jedes $i\in I$ eine stetige Funktion φ_i von E in das Einheitsintervall so, daß $\varphi_i(x)=0$, falls $x\in V_i^c$, und $\varphi_i(x)=1$, falls $x\in A$. Die Funktion $\Phi=\sum_{i\in I}\varphi_i$ ist stetig, da Φ in jedem Punkt in einer passenden Umgebung eine endliche Summe stetiger Funktionen ist. Für alle $i\in I$ ist dann auch $f_i=\varphi_i/\Phi$ stetig. $F=\{f_i\}_{i\in I}$ ist dann eine $\mathcal{O}$ untergeordnete Partition der Eins. $\square$

Um zu demonstrieren, welche Bedeutung dieser Satz für die Anwendungen hat, möchte ich hier zwei Beispiele erwähnen.

<u>9.2 Beispiele:</u> A) Ein wichtiger Satz für die Analysis und geometrische Topologie ist das "Betwean Theorem". Eine Funktion f ist <u>stetig von unten</u>, wenn für jede

reelle Zahl a das Urbild von (a,∞) offen ist; sie ist stetig von oben, wenn das Urbild von $(-\infty,a)$ offen ist.

Ist z.B. U eine offene Menge, dann ist χ_U -die charakteristische Funktion von U- eine stetige Funktion von unten. Bei abgeschlossenen Mengen A ist χ_A stetig von oben. In normalen Räumen gibt es zu einer abgeschlossenen Menge A und einer offenen Umgebung U von A stets eine stetige nichtnegative Funktion h so, daß $\chi_A \leq h \leq \chi_{U^c}$. In vollnormalen Räumen läßt sich dies verstärken. Dowker(1953) bewies:

<u>Satz</u>: Sei E ein vollnormaler Raum, f eine von unten stetige Funktion, g eine von oben stetige Funktion und sei $g<f$.
Dann gibt es eine stetige Funftion h so, daß $g<h<f$.

Beweis: Für alle ganzrationalen a ist
$Q_a = f^{-1}(a,\infty)\cap g^{-1}(-\infty, a) = \{x\in E \mid g(x)<a<f(x)\}$ offen.
$\{Q_a \mid a \text{ ganzrational}\}$ ist eine offene Überdeckung und besitzt eine ihr untergeordnete Partition Φ der Eins. Der Träger $Tr(\varphi)$ jeder Funktion $\varphi\in\Phi$ liegt in einem Q_a. Es gibt also ein a_φ (a_φ ganzrational) so, daß für $x\in Tr(\varphi)$ $g(x)<a_\varphi<f(x)$ gilt. Die Funktion $h=\sum_{\varphi\in\Phi} a_\varphi\cdot\varphi$ ist dann eine stetige Funktion. Sei $x\in E$ und $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}=\{\varphi\in\Phi \mid \varphi(x)\neq 0\}$. Dann ist
$g(x)<a_{\varphi_i}<f(x)$ $(i=1,\dots,n)$. Es gilt somit:

$$g(x) = \sum_{\varphi\in\Phi} g(x)\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} g(x)\varphi_i(x) < \sum_{i=1}^{n} a_{\varphi_i}\varphi_i(x) = h(x)$$
$$< \sum_{i=1}^{n} f(x)\varphi_i(x) = \sum_{\varphi\in\Phi} f(x)\varphi(x) = f(x). \quad \square$$

Bemerkung: Für diesen Beweis genügt vorauszusetzen, daß der Raum normal und "abzählbar parakompakt" ist. Dann gilt auch die Umkehrung (vgl. Dowker(1953)).

2) Noch ein Beispiel aus der Theorie der Distributionen:

In offenen Teilmengen von E^n gilt eine stärkere Normalitätsbedingung[1]: Ist V abgeschlossen und U eine offene Umgebung von V, dann existiert eine unendlich oft differenzierbare Funktion f ($f \in \mathcal{C}^\infty$), die auf V den Wert Eins und auf U^c den Wert Null annimmt. Zu jeder offenen Überdeckung kann demnach -wie bei stetigen Funktionen- eine ihr untergeordnete Partition der Eins aus unendlich oft differenzierbaren Funktionen gefunden werden. Mit Hilfe einer solchen Partition der Eins kann man folgenden Satz aus der Theorie der Distributionen beweisen (Vgl. Trevens(1967 ,§24).

<u>Satz:</u> Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine Familie offener Mengen in E^n. Für alle $i \in I$ sei T_i eine Distribution auf U_i , wobei für alle $i,j \in I$ die Restriktion von T_i und T_j auf $U_i \cap U_j$ übereinstimmen möge. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Distribution T auf $U = \bigcup_{i\in I} U_i$, die auf U_i mit T_i übereinstimmt.

(Im Beweis setzt man die Existenz einer $\{U_i\}$ untergeordneten Partition $\{g_i\}_{i\in I}$ der Eins voraus, sodaß also jedes $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$ die Darstellung $\Phi = \sum_{i\in I} g_i \Phi$ hat und definiert: $\langle T, \Phi \rangle = \sum_{i\in I} \langle T_i, g_i \Phi \rangle$).

---

1) $E^n = \{(x_1,\dots,x_n) \mid x_i \text{ reell}\}$

Literaturverzeichnis

P.Alexandroff: Sur les ensembles de la première classe et les ensembles abstraits, C.R.Acad.Sci. Paris, (1924), 178, 185-7

----: Some results in the theory of topological spaces, obtaines within the last twenty-five years, Russian Math.Survey, (1960[a]), 15, Nr.2, 23-83

----: (Über die Metrisierbarkeit topologischer Räume), Bull.Acad.Polon.sci.Sér.sci.math., astron. et phys., (1960, [b]), 8, 135-40

----: On some basic direction in general topology, Russian Math.Survey, (1964), 19, Nr.6

---- und P.Urysohn: Une condition necessaire et suffisante pour qu'une classe ($\mathcal{L}$) soit une classe ($\mathcal{D}$), C.R.Acad.Sci.Paris, (1923), 177, 1274-7

A.Archangelski: (Die Metrisierbarkeit topologischer Räume), Bull.Acad.Polonaise, (1960), 8, 589-95

----: (Neue Kriterien der Parakompaktheit und Metrisierbarkeit für beliebige T_2-Räume), Dokl.Nauk SSSR, (1961), 141, 13(-13)

----: (Über Abbildungen metrischer Räume), Soviet Math. Dokl., (1962), 3, 953-6

R.Arens und J.Dugundji: Remark on the concept of compactness, Port.Math., (1950), 9, 141-3

R.H.Bing: Metrization of topological spaces, Canad. J.Math., (1951), 3, 175-86

M.Brown: A proof of the generalized Schönflie8-Theorem,Bull.Amer.Math.Soc.,(1960),66,74-6

M.M.Chaban: (Einige Sätze über die Metrisierbarkeit für eine Klasse topologischer Räume),Dokl.Nauk SSSR,(1967),174,Nr.1,41-4

H.H.Corson: The determination of paracompactness by uniformities,Am.J.Math.,(1958),80(1),185-90

---:Normality in subsets of product spaces,Am.J.Math.,(1959),81,785-96

J.Dieudonné: Une generalitation des espaces compact, J.Math.Pure Appl.,(1944),23, 65-76

C.H.Dowker: On countable paracompact spaces,Canad.J.Math.,(1951),3,219-44

V.Y.Egorov und Ju.Podstavkin: (Über eine neue Definition der Dimension),Usp.mat.Nauk,(1968),178,Nr.4,774-7 Dokl. Akad. Nauk SSSR

A.H.Frink: Distance functions and the metrization problem,Bull.Amer.Math.Soc.,(1937),43,133-42

S.A.Gaal: Point-set topology,Ac.Pr.,New York,(1964)

L.Haddad: Sur quelques points de top.génerale,C.R.Acad.Sci.Paris,(1968),266,Nr.12,613-5

E.Hewitt und K.A.Ross: Abstact harmonic analysis Berlin , Spinger,(1963)

K.Iseki: A note on hypocompact spaces, Math.Japan ,(1953), 3,46-7

M.Katêtov: (Über die Fortsetzung von lokalendlichen Überdeckungen),Coll.Math.,(1958),6,145-51

Y.Katuta: A theorem on paracompactness of product spaces,Proc.Jap.Acad.,(1967),43,Nr.7,615-8

J.L.Kelley: Topology,New York,(1955)

Yu.Lee und C.H.Mozzochi: Topological spaces with large uniformities,Kyungpark Math.J.,(1967),7,7-8

A.Lelek: On totally paracompact metric spaces,Proc. Am.Math.Soc.,(1968),19,Nr.1,168-70

E.Michael: A note on paracompact spaces,Proc.Am. Math.Soc.,(1953),4,831-8 24.(1) 83

---:Local properties of topological spaces,Duke Math.J.,(1954),21,163-71

---: Another note on paracompact spaces,Proc.Am.Math. Soc.,(1957),8,822-8

---: Yet another note on paracompact spaces,Proc. Am.Math.Soc.,(1959),10,309-14

K.Morita: Star-finite coverings and star-finite property,Math.Japan,,(1948),1,60-8

J.Nagata: On a necessary and sufficient condition of metrizability,J.Inst.Polyt.Osaka City univ. (1950),1,93-100

D.Rolfsen: Alternative metrization proofs,Canad. J.Math.,(1966),18,Nr.4,750-7

H.Schubert: Topologie,Teubner Stuttgart,(1964)

Yu.Smirnov: (Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Metrisierbarkeit eines topologischen Raumes),Dokl.Nauk SSSR,(1951),77,197-200

R.H.Sorgenfrey: On the topological product of paracompact spaces,Bull.Am.Math.Soc.,(1947),53,631-2

A.H.Stone : Paracompactness and product spaces,Bull. Amer.Math.Soc.,(1948),54, 977-82

F.Travens: <u>Topological vector spaces, distributions and kernels,</u> (1967)

J.W.Tukey: <u>Convergence and Uniformities in topology,</u> Ann. of Math. Studies 2 (1940)
Kraus Reprint Corporation, New York, (1965)

A.Weil: <u>Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale</u>, Actualités Sci.Ind.551, Paris, (1937)

Y.Yasui: Unions of strongly paracompact spaces, <u>Proc.Jap.Acad.</u>, (1968), 44, Nr.1