Ungleichungen

Zusammengestellt von Wolfgang Kirschenhofer

Linz 1996

1.Grundwissen

Es sei x $\in \mathbb{R}$. Die wichtigste Ungleichung lautet: $\boxed{x^2 \geq 0}$ (1)
In (1) gilt die Gleichheit nur für x = 0.

Viele Ungleichungen sind Äquivalenzumformungen von (1) .
Wir setzen nun in (1) für x:= a – b mit a> 0 und b> 0 und erhalten:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow \qquad \boxed{a^2 + b^2 \geq 2ab} \qquad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + a^2 + b^2 \geq a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow \boxed{2.\left(a^2 + b^2\right) \geq (a+b)^2} \qquad (3)$$

$$(3) \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{4} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}} \qquad (4)$$

$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ heißt **quadratisches Mittel** der beiden Zahlen a und b . (4) wird daher auch **Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel** (**A-Q-Ungleichung**) genannt.

$$(2) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a+b) \geq 2.\sqrt{ab} \Leftrightarrow \boxed{\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}} \qquad (5)$$

(5) wird **Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel** (**A-G-Ungleichung**) genannt.

$$(5) \Leftrightarrow \frac{a+b}{2ab} \geq \frac{\sqrt{ab}}{ab} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} = \left(\frac{a^{-1} + b^{-1}}{2}\right)^{-1}} \qquad (6)$$

$\frac{2ab}{a+b} = \left(\frac{a^{-1} + b^{-1}}{2}\right)^{-1}$ heißt **harmonisches Mittel** der beiden Zahlen a und b .

(6) heißt auch **Ungleichung vom geometrischen und harmonischen Mittel**
(**G-H-Ungleichung**).

Weiters gilt: $\boxed{\min(a,b) \leq \frac{2ab}{a+b}}$ (7) und $\boxed{\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \leq \max(a,b)}$ (8)

Beweis von (7) und (8): Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.) a ≤ b ; **beachte**: laut Voraussetzung ist **a** >**0** und **b** >**0**.Es ist dann min(a,b)=a >0 und max(a,b)=b >0 und es gilt :
(7) $\Leftrightarrow a.(a+b) \leq 2ab \Leftrightarrow a^2 \leq ab \Leftrightarrow a \leq b$ und (8) $\Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 2b^2 \Leftrightarrow a^2 \leq b^2 \Leftrightarrow a \leq b$.

Aus (2) bis (8) erhält man dann die folgende Ungleichungskette:

$$\boxed{\min(a,b) \le \frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le \max(a,b)} \qquad (9)$$

(2) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{a^2+b^2}{ab} \ge 2$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} \ge 2}$ (10)

(10) $\Leftrightarrow$ $\boxed{x+\dfrac{1}{x} \ge 2\,,\ x>0}$ (11)

In (11) gilt Gleichheit nur für x = 1 .

<u>Bemerkungen</u>: a)In den Ungleichungen (2) bis (10) gilt das Gleichheitszeichen nur für a = b ,wie aus obiger Beweisführung hervorgeht.

b)Die Ungleichungen (2) bis (5) und (8) gelten auch für a = 0 oder b = 0 .

c)Die Ungleichungen (2) und (3) gelten für alle reellen a , b (Beweis als Übung !)

d)Die Ungleichungskette (9) heißt auch **Satz vom harmonischen,geometrischen,arithmetischen und quadratischen Mittel .**

e)Obige Ungleichungen und ihre Verallgemeinerungen auf n Zahlen $a_1,a_2,...,a_n$ gehören zum **Grundwissen** und sollten von den Schülern in jedem Zusammenhang sicher erkannt werden.

<u>Bezeichnung</u>: Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}:=\{1,2,3,.....\}$; $\mathbb{N}_0:=\mathbb{N}\cup\{0\}$.

2.<u>Aufgaben und weitere wichtige Ungleichungen</u>

1.Zeige: $\forall x\in\mathbb{R}$ gilt $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \ge 2$

2.Für a,b,c ≥ 0 gilt $(a+b).(b+c).(c+a) \ge 8abc$

3.Für $a,b\in\mathbb{R}$ gilt $(a+b)^4 \le 8.(a^4+b^4)$

4.Für a,b ≥ 0 gilt $(a+b)^n \le 2^{n-1}.(a^n+b^n)$

5.Wenn $a_i > 0$ für $i\in\{1,2,...,n\}$ und $a_1.a_2.....a_n = 1$,dann gilt $(1+a_1).(1+a_2).....(1+a_n) \ge 2^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

6.$\forall n > 1$, $n\in\mathbb{N}$ gilt $(1+a_1).(1+a_2).....(1+a_n) > 1+a_1+...+a_n$, wenn alle $a_i > -1$ und alle a_i entweder alle positiv oder alle negativ sind.
Sind alle $a_i = a > -1$,dann erhält man die wichtige **Bernoullische Ungleichung**

$$\boxed{(1+a)^n > 1+n.a\ ,\text{wenn } a>-1,\ a\ne 0\ ,\ n\ge 2, n\in\mathbb{N}} \qquad (12)$$

7. $\forall n\in\mathbb{N}$ gilt $(2n)! < 2^{2n}.(n!)^2$

8. $\forall n > 2$, $n\in\mathbb{N}$ gilt $(n+1)^n < n^{n+1}$

9.Man zeige: a) $\forall n\in\mathbb{N}$ gilt $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < 3$; b) $\forall n\geq 5$, $n\in\mathbb{N}$ gilt $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < 3$

10.Man zeige: $f(x) := 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7 \geq 0$ *für* $x \geq 1$.

11.Für a,b,c,d ≥ 0 gilt $\sqrt{(a+c).(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$

12.Für reelle a,b,c gilt $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ (13)

13.Für reelle x,y,z gilt:a) $(x+y+z)^2 \leq 3.(x^2+y^2+z^2)$ und b) $3.(xy+yz+zx) \leq (x+y+z)^2$

14.(Israel-Olympiade 1968): Für a,b,c > 0 gilt $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a+b+c$

15.(US-Olympiade 1976): Die Summe der sechs Kantenlängen eines Tetraeders PABC mit $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 90^0$ sei S. Bestimme (mit Beweis) das maximale Volumen.

16.Zeige durch wiederholte Anwendung von (5),daß für $a_i \geq 0$, $i\in\{1,2,3,4\}$ gilt:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \geq 4.\sqrt[4]{a_1.a_2.a_3.a_4} \qquad (14)$$

17.Zeige als Verallgemeinerung von (14) mittels vollständiger Induktion,daß für $a_i \geq 0$ gilt:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^k} \geq 2^k.\sqrt[2^k]{a_1.a_2.\ldots.a_{2^k}} \qquad (15)$$

18.Zeige $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \geq 5.\sqrt[5]{a_1.a_2.a_3.a_4.a_5}$, indem du in der bereits bewiesenen Ungleichung $a_1 + \ldots + a_8 \geq 8.\sqrt[8]{a_1.\ldots.a_8}$ $a_6 = a_7 = a_8 = l := \frac{a_1 + \ldots + a_5}{5}$ setzt.

19.Beweise mit Hilfe von (15) und den Ideen aus der Aufgabe 18 die allgemeine **Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel:**

$$\boxed{\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2.\ldots.a_n} \text{ für } a_i \geq 0} \qquad (16)$$

In (16) gilt die Gleichheit nur für $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$

20. Für $a_i > 0$, $1\leq i \leq n$ gilt:

$$\boxed{\min a_i \leq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1.a_2.\ldots.a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \leq \max a_i} \qquad (17)$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} = \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \ldots + a_n^{-1}}{n}\right)^{-1}$ heißt **harmonisches Mittel** der n Zahlen $a_1,\ldots,a_n$

und $\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$ heißt **quadratisches Mittel** der n Zahlen $a_1,\ldots,a_n$.

21.(US-Olympiade 1974): Sind a,b,c > 0 , so gilt $a^a.b^b.c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$

22.(Ungleichung von Nesbitt,England 1903):Sind a,b,c > 0 , so gilt

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2} \qquad (18)$$

23.(SU-Olympiade 1975) : Für a,b,c ≥ 0 gilt

$a^3+b^3+c^3+3abc\geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$

24.(6. IMO 1964): Es seien a,b,c Seiten eines Dreiecks. Zeige,daß

$a^2.(b+c-a)+b^2.(c+a-b)+c^2.(a+b-c)\leq 3abc$

25.(SU-Olympiade 1968): Eine Folge ist definiert durch $x_1=1$, $x_{n+1}=x_n+\dfrac{1}{x_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Zeige,daß $14 < x_{100} < 18$ ist.

26.Die **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:**

Für alle x∈ $\mathbb{R}$ gilt: $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i.x+b_i)^2=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^{\,2}\right).x^2+2.\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i.b_i\right).x+\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^{\,2}\geq 0$.

Für die Diskriminante D dieses quadratischen Polynoms in x muß daher gelten D ≤ 0 .

$$D = 4.\left(\sum_{i=1}^{n}a_i.b_i\right)^2-4.\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right).\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)\leq 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{.\left(\sum_{i=1}^{n}a_i.b_i\right)^2\leq.\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right).\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)} \qquad (19)$$

(19) heißt **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung** . Verwendet man die Vektorschreibweise $\vec{a}=(a_1,\ldots,a_n)$, $\vec{b}=(b_1,\ldots,b_n)$, dann lautet (19) $\left(\vec{a}.\vec{b}\right)^2\leq|\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2$.

In (19) gilt das Gleichheitszeichen genau dann,wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig sind .

27.Beweise mit Hilfe von (19) :

a) Die **Dreiecksungleichung**: $\boxed{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2}\geq\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}}$ (20)

b) $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}\leq\sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}{n}}$ (siehe auch Aufgabe 20.)

c) $(x_1+\ldots+x_n).\left(\dfrac{1}{x_1}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}\right)\geq n^2$, für $x_i > 0$ mit 1≤ i ≤ n .

d) Sind a,b,c > 0 ,dann gilt: $\left(a^2.b+b^2.c+c^2.a\right).\left(a.b^2+b.c^2+c.a^2\right)\geq 9.a^2.b^2.c^2$

28.Die Folgen $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ und $\langle b_1,\ldots,b_n\rangle$ heißen **gleichgeordnet** , wenn

$(a_i-a_j).(b_i-b_j)\geq 0$, $\forall i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$;

sie heißen **entgegengesetzt geordnet** , wenn

$(a_i-a_j).(b_i-b_j)\leq 0$, $\forall i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$.

Es seien nun $a_1,a_2,...,a_n$ und $b_1,b_2,...,b_n$ reelle Zahlen und $c_1,c_2,...,c_n$ sei eine Permutation von $b_1,b_2,...,b_n$ .Der folgende Satz beantwortet die Frage,welche der n! Summen $S:= a_1.c_1 + a_2.c_2 +...+ a_n.c_n$ maximal bzw. minimal ist .

Hauptsatz: Die Summe $S:= a_1.b_1 + a_2.b_2 +...+ a_n.b_n$ ist maximal,wenn die Folgen $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ und $\langle b_1,\ldots,b_n\rangle$ gleichgeordnet sind.
S ist minimal,wenn die beiden Folgen entgegengesetzt geordnet sind.

Beweis: Es sei $a_r < a_s$. Wir betrachten die Summen
$S = a_1.c_1+\ldots+a_r.c_r+\ldots+a_s.c_s+\ldots+a_n.c_n$ und $S' = a_1.c_1+\ldots+a_r.c_s+\ldots+a_s.c_r+\ldots+a_n.c_n$,
die sich nur dadurch unterscheiden ,daß in S' c_s und c_r vertauscht sind. Dann ist
$S' - S = a_r.c_s + a_s.c_r - a_r.c_r - a_s.c_s = (a_r - a_s).(c_s - c_r)$ (*)
Ist nun $c_s < c_r$,dann ist nach (*) $S' > S$. Ist aber $c_s > c_r$,dann ist nach (*) $S' < S$.
Daraus folgt sofort die Behauptung.

29.Man leite die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel mit Hilfe des Hauptsatzes her .

<u>Lösung:</u> Es sei $x_i > 0$ und $c:=\sqrt[n]{x_1.x_2.....x_n}$, $a_1:=\dfrac{x_1}{c}$, $a_2:=\dfrac{x_1.x_2}{c^2}$, $a_3:=\dfrac{x_1.x_2.x_3}{c^3}$,....
..... , $a_n:=\dfrac{x_1.x_2.....x_n}{c^n}=1$ und $b_1:=\dfrac{1}{a_1}$, $b_2:=\dfrac{1}{a_2}$,..., $b_n:=\dfrac{1}{a_n}=1$. Die Folgen $\langle a_i\rangle$ und $\langle b_i\rangle$ sind entgegengesetzt geordnet. Nach dem letzten Satz gilt daher $\sum_i a_i.b_i \le \sum_i a_i.c_i$ (*)
wobei $\langle c_i\rangle$ eine Permutation von $\langle b_i\rangle$ ist. $\sum_i a_i.b_i = 1+1+\ldots+1 = n$ .Wir versuchen daher die c_i so zu wählen,daß $a_i.c_i = \dfrac{x_i}{c}$ gilt .
Wir müssen $c_1 = b_n = 1$, $c_2 = b_1$, $c_3 = b_2$,..., $c_i = b_{i-1}$,..., $c_n = b_{n-1}$ wählen, denn
$a_i.b_{i-1} = \dfrac{a_i}{a_{i-1}} = \dfrac{x_i}{c}$ und $\langle b_n, b_1, b_2, b_3,\ldots,b_{n-2}, b_{n-1}\rangle$ ist eine Permutation von $\langle b_1,\ldots,b_n\rangle$.
(*) lautet daher $n \le \sum_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{c}$; und dies ist äquivalent mit $\sqrt[n]{x_1\ldots x_n} \le \dfrac{x_1+\ldots+x_n}{n}$.

Ist mindestens ein $x_j = 0$,dann gilt die A-G-Ungleichung trivialerweise. In (*) gilt Gleichheit genau für $c_i = b_i$. $c_i = b_i \Leftrightarrow c_i = \dfrac{x_i}{c.a_i} = \dfrac{x_i}{c}.b_i = b_i \Leftrightarrow x_i = c$, $d.h.$ $x_1 = x_2 =\ldots= x_n = c$. ($a_i = b_i = c_i = 1$) . Es gilt daher Gleichheit in der A-G-Ungleichung genau für $x_1 = x_2 = ...= x_n$.

30.Beweise mit dem Hauptsatz die Ungleichung zwischen dem harmonischen und arithmetischen Mittel.

31.Beweise mit dem Hauptsatz die Aufgabe 14 .

32.Die **Ungleichung von Tschebyschew:**
a)Sind $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ und $\langle b_1,\ldots,b_n\rangle$ zwei gleichgeordnete Folgen reeller Zahlen (beide monoton wachsend oder beide monoton fallend),dann gilt:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i.b_i \geq \frac{1}{n}.\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right).\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)} \qquad (21)$$

b)Sind $\langle a_1,\dots,a_n\rangle$ und $\langle b_1,\dots,b_n\rangle$ zwei entgegengesetzt geordnete Folgen reeller Zahlen,dann gilt:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i.b_i \leq \frac{1}{n}.\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right).\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)} \qquad (22)$$

In (21) bzw. (22) gilt die Gleichheit genau dann,wenn eine der beiden Folgen konstant ist.

Beweis: a) Es seien $\langle a_1,\dots,a_n\rangle$ und $\langle b_1,\dots,b_n\rangle$ zwei gleichgeordnete Folgen.

Es gilt dann nach dem Hauptsatz:

$$\begin{aligned}
a_1.b_1 + a_2.b_2 + \dots + a_n.b_n &= a_1.b_1 + a_2.b_2 + \dots + a_n.b_n \\
a_1.b_1 + a_2.b_2 + \dots + a_n.b_n &\geq a_1.b_2 + a_2.b_3 + \dots + a_n.b_1 \\
a_1.b_1 + a_2.b_2 + \dots + a_n.b_n &\geq a_1.b_3 + a_2.b_4 + \dots + a_n.b_2 \\
a_1.b_1 + a_2.b_2 + \dots + a_n.b_n &\geq a_1.b_4 + a_2.b_5 + \dots + a_n.b_3 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_1.b_1 + a_2.b_2 + \dots + a_n.b_n &\geq a_1.b_n + a_2.b_1 + \dots + a_n.b_{n-1}
\end{aligned}$$

Durch Addition erhält man:

$$n.(a_1.b_1 + a_2.b_2 + \dots + a_n.b_n) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n).(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \Rightarrow (21)$$

Gleichheit gilt genau dann,wenn keine Vertauschung der b_i eine Änderung bewirkt,und dies ist genau dann der Fall,wenn eine der beiden Folgen $< a_i >$ oder $< b_i >$ konstant ist.

b) Analog beweist man (22)

33.Beweise mit Hilfe der Tschebyschew-Ungleichung die A-Q-Ungleichung

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

34.Beweise mit Hilfe der Tschebyschew-Ungleichung die Ungleichung vom harmonischen und arithmetischen Mittel,wobei die $a_i > 0$ vorausgesetzt sind für $1 \leq i \leq n$.

35.Die **Ungleichung von Jensen** (ohne Beweis): Zunächst eine **Definition:**

Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, und f eine reelle Funktion mit der Definitionsmenge I.

f heißt **konvex** (in I),wenn $\forall a,b \in I$ mit $a < b$ und für $0 \leq t \leq 1$ gilt:

$$f\big(t.a + (1-t).b\big) \leq t.\, f(a) + (1-t).\, f(b)$$

Geometrisch gedeutet,heißt dies: Auf jedem Teilinterval [a,b] von I verläuft der Funktionsgraph „unterhalb“ der Sehne,welche die Punkte (a,f(a)) und (b,f(b)) verbindet.

Ungleichung von Jensen:

Sind $t_1, t_2, \dots, t_n$ positive reelle Zahlen und $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset I$ und f konvex in I ,dann gilt:

$$\boxed{f\left(\frac{t_1.x_1 + \dots + t_n.x_n}{t_1 + \dots + t_n}\right) \leq \frac{t_1.\, f(x_1) + \dots + t_n.\, f(x_n)}{t_1 + \dots + t_n}} \qquad (23)$$

Mit Gleichheit genau dann,wenn $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

(Beweis mittels vollständiger Induktion).

<u>Bemerkung:</u> Häufig benötigt man nur den Sonderfall $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 1$,d.h. (23) hat dann die Form

$$\boxed{f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}} \qquad (23a)$$

36.**Die allgemeine Mittelungleichung:** Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}^+$.

Definition des α-Mittels m_α : $m_\alpha := \left(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + ... + x_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$ für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$m_0 := \sqrt[n]{x_1 . x_2 ..... x_n}$$

Allgemeine Mittelungleichung: $\boxed{\min x_i \le m_\alpha \le m_\beta \le \max x_i \quad \text{für} \ \alpha < \beta}$ (24)

Mit Gleichheit genau für $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

3.Strategien für das Beweisen von Ungleichungen

1.Läßt sich die Ungleichung durch Äquivalenzumformungen auf die Form $\sum_i p_i \ \ mit \ \ p_i \ge 0$ bringen ? Z.B.: $p_i = x_i^2$.

2.Erinnern vorkommende Terme an das arithmetische,geometrische,harmonische oder quadratische Mittel ? Läßt sich durch Äquivalenzumformungen schließlich eine der Mittelungleichungen anwenden ?

3.Ist die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung oder die Ungleichung von Jensen anwendbar ?

4.Ist der Hauptsatz anwendbar ?

5.Ist die Ungleichung symmetrisch in den Variablen a,b,c,... ? Wenn ja,so kann man o.B.d.A. annehmen, daß a das maximale oder minimale Element ist,oder daß $a \le b \le c \le ...$ ist. Manchmal ist es auch von Vorteil die vorkommenden Terme durch die elementarsymmetrischen Polynome auszudrücken.

6.Ist die Ungleichung homogen in den Variablen,so kann man passend normieren.

7.Bringe alle Glieder auf eine Seite (linke Seite). Kann man die linke Seite als Diskriminante einer quadratischen Gleichung deuten ? Ist die linke Seite ein quadratisches Polynom in einer Variablen ? Hilft der Satz von Vieta weiter ? Hilft Faktorisierung weiter ?

8.Gilt die Ungleichung für alle natürlichen Zahlen $n \ge n_0$, so wende man Induktion an .

9.Treten Reihen oder Produkte auf,so versuche man Abschätzungen durch Teleskop-Reihen oder Teleskop-Produkte:

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + ... + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_1 \quad ; \quad \frac{a_2}{a_1} . \frac{a_3}{a_2} ..... \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_n}{a_1}$$

10.Ist keine dieser Methoden direkt anwendbar,so forme man gezielt um,bis eine Standardmethode anwendbar wird.

4.Weitere Aufgaben

37.Seien $a_1, a_2, ..., a_n$ reelle Zahlen ,sodaß $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$.Es gilt dann $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \ge \frac{1}{n}$

38.Seien a,b,c > 0, sodaß $(1+ a).(1+ b).(1+ c) = 8$. Es gilt dann $a.b.c \le 1$.

39. (US-Olympiade 1978) : Es seien a,b,c,d,e reelle Zahlen,sodaß $a + b + c + d + e = 8$ und $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16$. Ermittle den Maximalwert von e .

40.Die Ungleichung von Weitzenböck: a,b,c seien die Seiten eines Dreiecks mit dem Flächeninhalt A . Es gilt dann: $a^2 + b^2 + c^2 \ge 4.A.\sqrt{3}$.

41.Beweise: Der Würfel hat unter allen Quadern mit konstanter Oberfläche das größte Volumen und unter allen Quadern mit konstantem Volumen die kleinste Oberfläche.

42.(Moskau,1978):Es sei $a^2 + b^2 = 4$ und c.d = 4 .
Beweise,daß $(a-d)^2 + (b-c)^2 \geq 4.(3-2.\sqrt{2})$

Literaturliste

- E.Hlawka: Ungleichungen. Manz Verlag,Wien 1990
- Hardy-Littlewood-Pólya: Inequalities. Cambridge University Press,1973
- D.S.Mitrinovic: Elementary inequalities. Noordhoff,Groningen 1964
- A.Engel:Ungleichungen;aus der Zeitschrift „Der Mathematikunterricht 1,1979.
- N.D.Kazarinoff:Geometric Inequalities. Random House,New York,1961
- Bottema-Djordjevic-Janic-Mitrinovic-Vasic: Geometric Inequalities,Wolters-Noordhoff Publishing,Groningen 1969
- Ungleichungen , Skriptum des Bundesmin.f.Unterr.u.kulturelle Ang. für Olympiade-Kursleiter.
- G.Baron ,E.Windischbacher: Österreichische Mathematik-Olympiaden 1970-1989. Universitätsverlag Wagner,Innsbruck , 1990.
- M.S.Klamkin: USA Mathematical Olympiads 1972-1986. The Mathematical Association of America ,1988
- L.C.Larson:Problem-Solving through problems,Springer-Verlag,New York,1983