Einführung in das Skalarprodukt

in Aufgaben

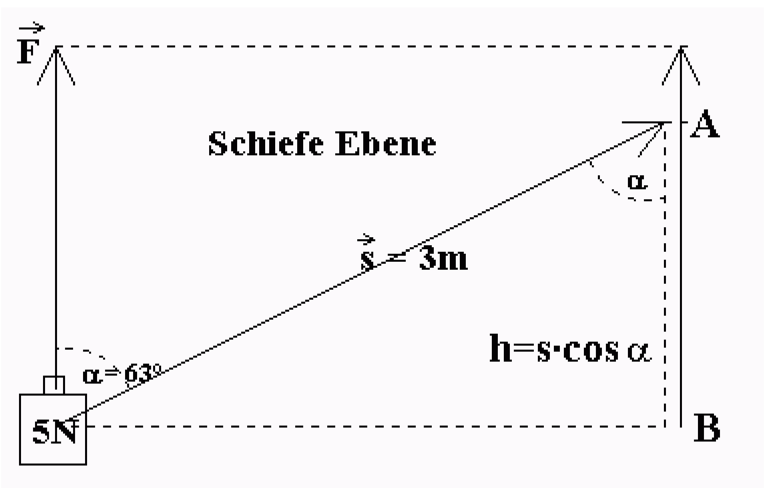
Alle Lektionen und Texte der Delphi-Ecke sind in der gepackten Zip-Datei Delphi-Ecke (ohne Urlaubsbilder) (Stand: Mai 2009 mit ca. 3 MB) enthalten und können lokal auf den Computer heruntergeladen werden.

Zur Abiturvorbereitung und für Studienanfänger zur Wiederholung.

Hier wird das Skalarprodukt anschaulich eingeführt: Die Beträge (Längen) von Vektoren und die Winkel zwischen zwei Vektoren werden zur Definition benötigt.

Als erstes wird dann hergeleitet, wie sich das Skalarprodukt und damit auch der Winkel zwischen zwei Vektoren alleine aus den Koordinaten der Vektoren berechnen lässt.

Mit Hilfe des Skalarproduktes kann man dann viele geometrisch Eigenschaften algebraisch ausdrücken, vor allem wann zwei Vektoren, Geraden oder Ebenen **senkrecht** zueinander stehen.



α = Winkel zwischen angreifender Kraft $\vec{F}$ und zurückgelegtem Weg $\vec{s}$

Mit dem Wechselwinkel ergibt sich:

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{h}{s} \Rightarrow h = s\cdot\cos\alpha$$

Motivation aus der Physik

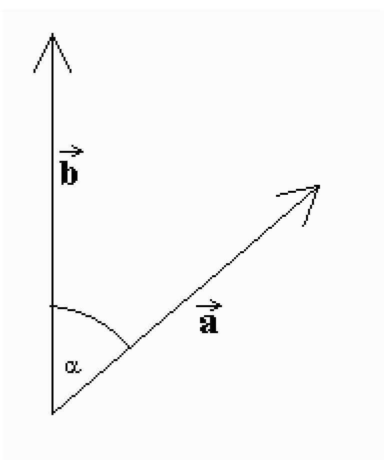
Frage: Ein Körper mit der Masse von 500g (Gewichtskraft F = 5N) wird entlang der schiefen Ebene s = 3m nach A transportiert. Welche Arbeit wird verrichtet? Oder: Um wie viel hat seine Lageenergie zugenommen?

Antwort: Man kann den Körper auch zuerst nach B transportieren. Die aufzuwendende Arbeit ist 0 (Reibungskräfte werden vernachlässigt.). Anschließend wird er senkrecht nach oben mit dem Höhenunterschied h = s·cosα transportiert. Die aufzuwendende Arbeit ist dann

$$W = F\cdot h = F\cdot s\cdot\cos\alpha$$
$$=5N\cdot 3m\cdot\cos 63° = 6{,}81\ Nm = 6{,}81\ J$$

Genau diese Formel steckt in der Definition des Skalarproduktes.

Unabhängig vom physikalischen Bezug: Immer, wenn von Winkeln die Rede ist, benötigt man das Skalarprodukt.



Definition des Skalarprodukts

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b\cdot\cos\alpha = |a|\cdot|b|\cdot\cos\alpha\ ,$$

wobei $a = |a|$ = Betrag von $\vec{a}$,

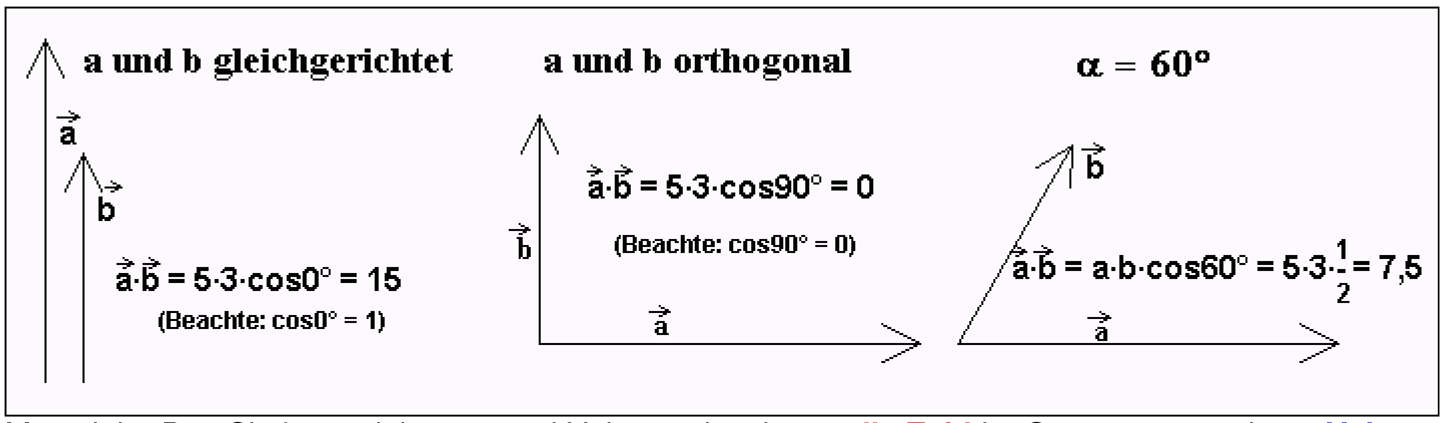
$b = |b|$ = Betrag von $\vec{b}$ und

α = Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

Zur Erinnerung:

für $\vec{a} = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix}$ ist $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Beispiele: `a = 5, b = 3, verschiedene Winkel.`



Man sieht: Das Skalarprodukt von zwei Vektoren ist eine **reelle Zahl** im Gegensatz zu einem **Vektor**. Der Physiker spricht dann von einer **skalaren Größe** im Gegensatz zu einer **gerichteten Größe**. Reine Zahlenwerte (Skalare) sind zum Beispiel die Lageenergie, die Zeit, die Temperatur und die elektrische Ladung, gerichtete Größen sind zum Beispiel die Geschwindigkeit, die Kraft oder die elektrische Feldstärke.

Ganz wichtig ist folgende einfache Tatsache:

Merke! (Der 1. Hauptsatz für das Skalarprodukt)	`a orthogonal b <=> a·b = 0` Nach dieser Beziehung ist der Nullvektor senkrecht zu jedem Vektor.

Für das Skalarprodukt gelten die üblichen Rechenregeln.

Regeln für das Skalarprodukt

KG	Das Kommutativgesetz:	$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$	das ist offensichtlich
AG	Das gemischte Assoziativgesetz:	$(k\cdot\vec{a})\cdot\vec{b} = k\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$ für $k \in \mathbf{R}$	(k=2) "doppeltes Gewicht => doppelte Arbeit"
DG	Das Distributivgesetz:	$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$	siehe untenstehende Figur

Eine Regel für reelle Zahlen gilt für Vektoren nicht, nämlich die Regel: a·b = 0 => a = 0 oder b = 0 (a, b ε**R**).

Bei orthogonalen Vektoren ist das Skalarprodukt ja immer Null, auch wenn keiner der Nullvektor ist. Man kann jedoch festhalten.

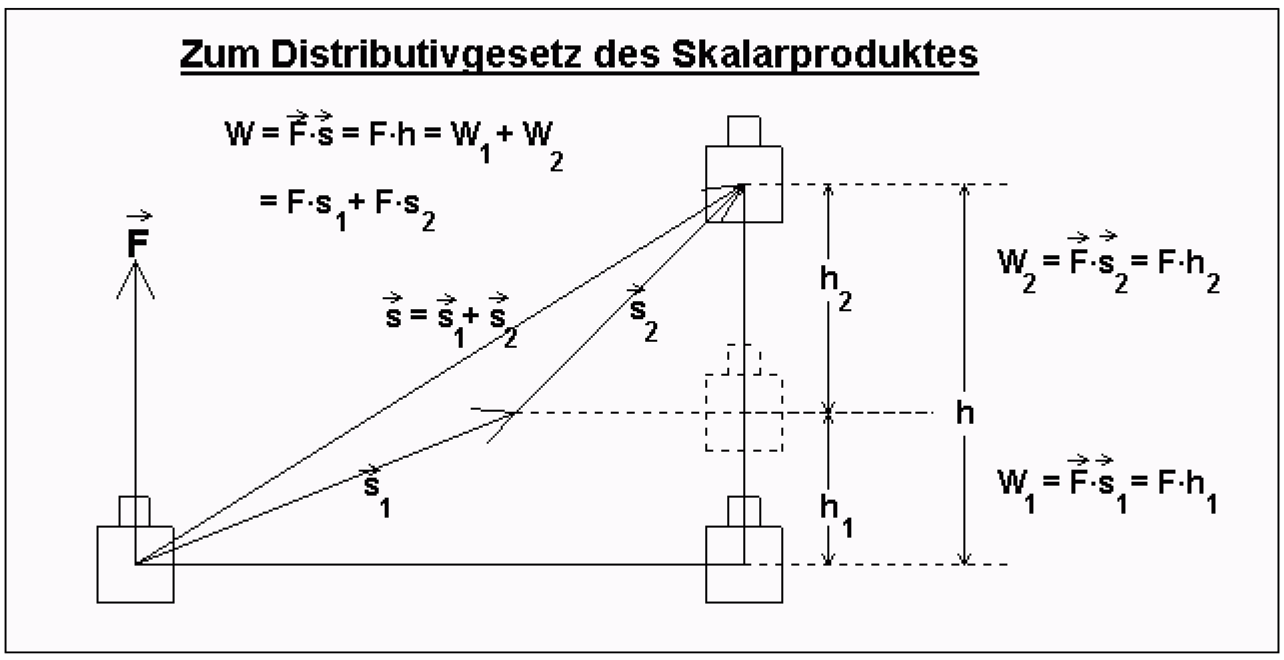
$\vec{a}\cdot\vec{a} > 0$ und $\vec{a}\cdot\vec{a} = 0$ nur für $\vec{a} = \vec{0}$	Der Mathematiker sagt dazu: Das Skalarprodukt ist **positiv definit.**

Der Beweis dieser Beziehung sowie des KG und AG folgt direkt aus den Definitionen, wobei man beim AG noch eine lästige Fallunterscheidung für positives und negatives k machen muss. Man spricht vom *gemischten* Assoziativgesetz, weil hier Skalar und Vektor *gemischt* werden.

Zum DG betrachte man folgende Figur:
Der besseren Veranschaulichung wegen sind für die Vektoren eine Kraft und zwei Strecken eingezeichnet und das Skalarprodukt mit W = Arbeit bezeichnet.

Behauptung:

$$\vec{F}\cdot\vec{s} = \vec{F}\cdot(\vec{s}_1 + \vec{s}_2) = \vec{F}\cdot\vec{s}_1 + \vec{F}\cdot\vec{s}_2$$



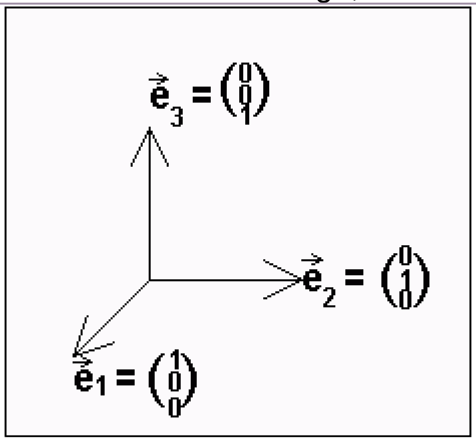
`Beweis: Für die Physiker ist klar:`

Die verrichtete Arbeit richtet sich nur nach dem Höhenunterschied $h = h_1 + h_2$.

Die Mathematiker überzeugt man mit der ersten Figur, dort sieht man:

$|F|\cdot|s|\cdot\cos\alpha = |F|\cdot h$, wobei h die *Projektion von s senkrecht zu F* ist.

Jetzt sind wir in der Lage, das Skalarprodukt von Vektoren mit Hilfe ihrer Koordinaten zu berechnen:



Für die **Einheitsvektoren**

$\vec{e}_1 = \begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix}$ und $\vec{e}_3 = \begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}$ gilt:

$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 = 1\cdot1\cdot\cos0° = 1$ und analog $\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 = 1$ und $\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3 = 1$,

sowie $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 = \vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 = \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 = 0$ wegen der Orthogonalität.

Sei $\vec{a} = \begin{vmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{vmatrix} = a_1\cdot\vec{e}_1 + a_2\cdot\vec{e}_2 + a_3\cdot\vec{e}_3$ und

$\vec{b} = \begin{vmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{vmatrix} = b_1\cdot\vec{e}_1 + b_2\cdot\vec{e}_2 + b_3\cdot\vec{e}_3$. Dann folgt (eine längere aber höchst einfache Rechnung)

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_1\cdot\vec{e}_1 + a_2\cdot\vec{e}_2 + a_3\cdot\vec{e}_3)\cdot(b_1\cdot\vec{e}_1 + b_2\cdot\vec{e}_2 + b_3\cdot\vec{e}_3)\\
&= a_1\vec{e}_1\cdot b_1\vec{e}_1 + a_1\vec{e}_1\cdot b_2\vec{e}_2 + a_1\vec{e}_1\cdot b_3\vec{e}_3\\
&+ a_2\vec{e}_2\cdot b_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2\cdot b_2\vec{e}_2 + a_2\vec{e}_2\cdot b_3\vec{e}_3 +\\
&+ a_3\vec{e}_3\cdot b_1\vec{e}_1 + a_3\vec{e}_3\cdot b_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3\cdot b_3\vec{e}_3\\
&= a_1b_1 + 0 + 0\\
&+ 0 + a_2b_2 + 0\\
&+ 0 + 0 + a_3b_3\\
&= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3
\end{aligned}$$

Somit folgt: $\begin{vmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{vmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Merke! (Der 2. Hauptsatz für das Skalarprodukt)	$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|a\|\cdot\|b\|\cdot\cos\alpha = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ Insbesondere folgt: Der Winkel α zwischen zwei Vektoren berechnet sich zu $\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|a\|\cdot\|b\|}$, wobei $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ und $\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ ist.

Im zweidimensionalen gilt entsprechend:

$\begin{vmatrix}a_1\\a_2\end{vmatrix} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ $\qquad$ $\begin{vmatrix}a_1\\a_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_1\\b_1\end{vmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2$

Falls Du einmal mit vierdimensionalen Vektoren rechnen musst, wird Dir der Übergang nicht schwer fallen.

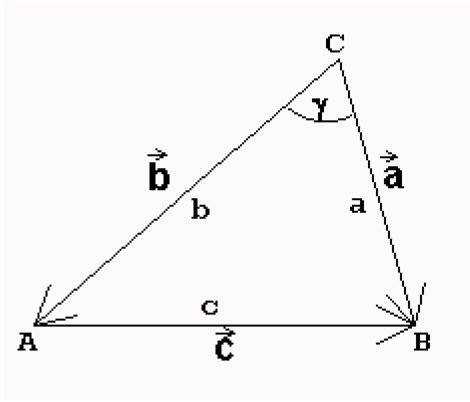
Trivial und dann doch wieder bemerkenswert ist folgender Sachverhalt:

Merke! $\vec{a}^2 = a^2$ $a = \|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}^2}$	Mit der Bezeichnung $a = \|\vec{a}\|$ gilt: $a^2 = \|\vec{a}\|^2 = \vec{a}^2$, also $a = \|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}^2}$ Nachweis: Für $\vec{a} = \begin{vmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{vmatrix}$ gilt $\vec{a}^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3$ $\rightarrow \quad / \; 2 \;\; 2 \;\; 2 \qquad 2 \;\; \rightarrow 2$

und $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1 + a_2 + a_3}$ also $a = a$.

Oder: Nach Definition: $\vec{a}^2 = |a|\cdot|a|\cos 0° = |a|\cdot|a| = a\cdot a = a^2$.

Im Beweis der folgenden Sätze zeigt sich:
Das Skalarprodukt ermöglicht, komplizierte Sätze, bei denen von Winkel die Rede ist, einfach zu beweisen.



Kosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

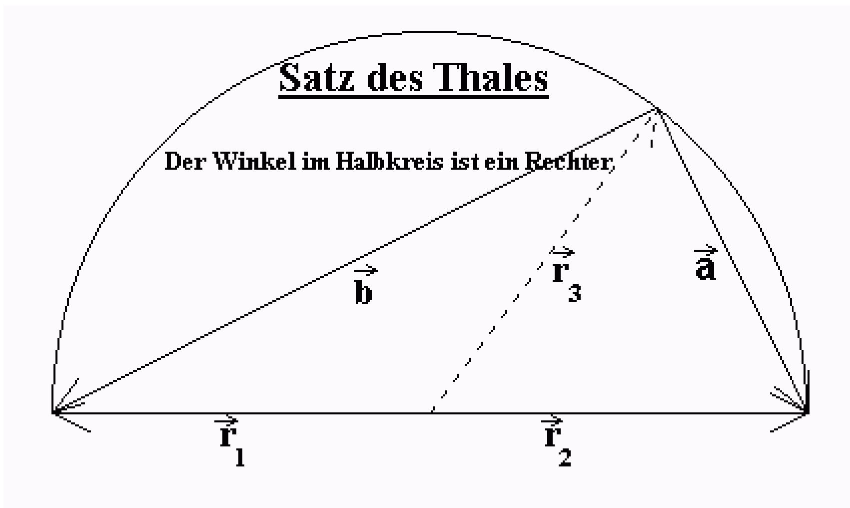
Beweis: Mit Hilfe der eingezeichneten Vektoren folgt:

$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ (Die Richtung von $\vec{c}$ nach rechts oder links ist willkürlich.) =>

$\vec{c}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}\vec{b}$ und damit $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$,

da nach Definition $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\gamma$. Für $\gamma = 90°$ ist $\cos\gamma = 0$

und damit ergibt sich der Spezialfall $c^2 = a^2 + b^2$ (Pythagoras!)



Beweis des Thalessatzes

Voraussetzung: $r_1 = r_2 = r_3$

und $\vec{r}_2 = -\vec{r}_1$.

Behauptung: a und b orthogonal.

Zu zeigen: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

Nachweis: $\vec{a}\cdot\vec{b} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_3)\cdot(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)$

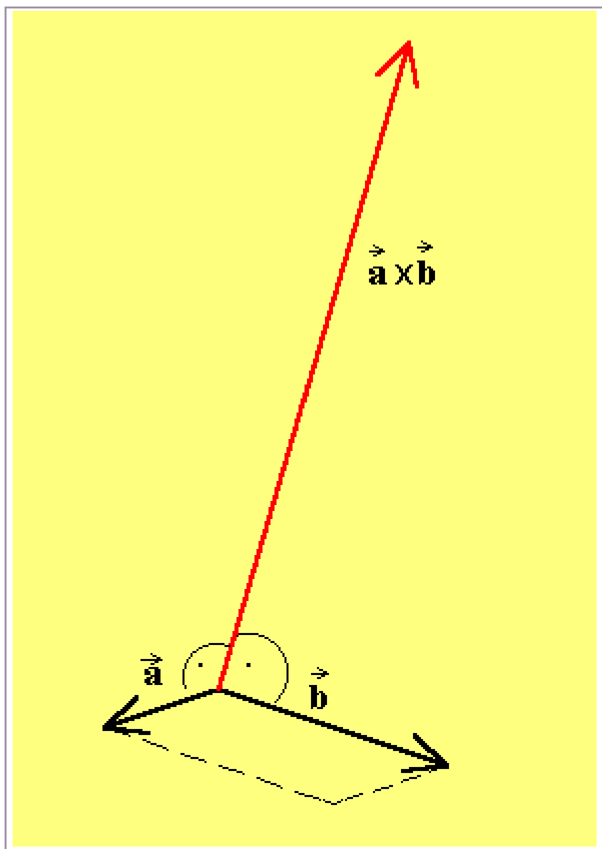
$= \vec{r}_2\cdot\vec{r}_1 - \vec{r}_2\cdot\vec{r}_3 - \vec{r}_3\cdot\vec{r}_1 + \vec{r}_3^{\,2}$

<——...fällt weg....——>

$= -\vec{r}_3\cdot(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = -r_3\cdot\vec{0} = 0$, da

... $\vec{r}_2\cdot\vec{r}_1 = (-\vec{r}_1)\cdot\vec{r}_1 = -\vec{r}_1^{\,2} = -\vec{r}_3^{\,2}$.

Das Vektorprodukt



Mit Hilfe des **Vektorproduktes** kann man zu je zwei Vektoren einen Vektor bilden, der zu beiden Vektoren senkrecht ist.

Seine Länge entspricht dem Flächeninhaltes des gestrichelten Parallelogramms.

In der Physik wird es zum Beispiel benötigt, um die Kraft auf einen elektrisch bewegten Leiter im Magnetfeld auszurechnen. Hier ist der eine Vektor in Stärke und Richtung der Bewegung gegeben, der zweite in Betrag und Richtung des magnetischen Feldes. Das Vektorprodukt der beiden Vektoren gibt dann Betrag und Richtung der Kraft auf den elektrischen Leiter nach der "rechten-Hand-Regel" an.

Im Gegensatz zum Skalarprodukt, das in Vektorräumen beliebiger Dimension definiert werden kann, gibt es das Vektorprodukt nur im 3-dimensionalen Räumen. Dort allein ist das Vektorprodukt von zwei linear unabhängigen Vektoren bis auf den Betrag eindeutig als ein Vektor definiert, der auf beiden Faktoren senkrecht steht.

Die Einführung zum Vektorprodukt hier soll nur eine Rechenhilfe für manche Aufgaben bereitstellen (In Baden-Württemberg gehört es nicht zum Lehrplan der Oberstufe). Es zu beherrschen, ist sehr vorteilhaft. Und wenn man es schon benutzt- und sei es nur als Rechenhilfe -, ist es wiederum gewinnbringend, das Wesentliche über das Vektorprodukt zu erfahren.

Definition: Für $\vec{a} = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix}$ ist $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2b_3 - b_2a_3 \\ a_3b_1 - b_3a_1 \\ a_1b_2 - b_1a_2 \end{vmatrix}$

Wegen der Schreibweise "x" wird des **Vektorprodukt** manchmal auch **Kreuzprodukt** genannt.

Im Gegensatz zum Skalarprodukt ist das **Vektor**produkt von zwei **Vektoren** wirklich ein **Vektor** und keine reellle Zahl (Skalar).

Folgende "Eselsbrücke" hat sich als **Merkregel** bewährt:

1. Schreibe beide Vektoren zwei Mal nebeneinander und untereinander auf.
2. Streiche die erste und letzte Zeile.
3. Bilde die Differenz der "über Kreuz" gebildeten Produkte.

$$
\begin{array}{cccc}
 & \text{1. Schritt} & \text{2. Schritt} & \text{3. Schritt} \\
\vec{a} \times \vec{b} = &
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ & \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_2 \end{vmatrix}
= &
\begin{vmatrix} a_2 & \text{X} & b_2 \\ a_3 & & b_3 \\ & \text{X} & \\ a_1 & \text{X} & b_1 \\ a_2 & & b_2 \end{vmatrix}
= &
\begin{vmatrix} a_2b_3 - b_2a_3 \\ a_3b_1 - b_3a_1 \\ a_1b_2 - b_1a_2 \end{vmatrix}
\end{array}
$$

Beispiele (der erste Schritt wird übersprungen):

$$
\text{a)} \quad \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & & 1 \\ & \text{X} & \\ 1 & & 2 \\ & \text{X} & \\ 3 & & 4 \\ & \text{X} & \\ 2 & & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cdot 2 - 1\cdot 1 \\ 1\cdot 4 - 2\cdot 3 \\ 3\cdot 1 - 4\cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{vmatrix}
$$

Bemerkung: Das "X" ist hier ist eine behelfsmäßige Schreibweise für folgende Zeichnung:

$$
\text{a)} \quad \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cdot 2 - 1\cdot 1 \\ 1\cdot 4 - 2\cdot 3 \\ 3\cdot 1 - 4\cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{vmatrix}
$$

$$
\text{b)} \quad \begin{vmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & & -1 \\ & \text{X} & \\ -1 & & 5 \\ & \text{X} & \\ -3 & & -2 \\ & \text{X} & \\ 2 & & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 - 1 \\ 2 + 15 \\ 3 + 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 \\ 17 \\ 7 \end{vmatrix} \quad \text{(Wie immer auf Vorzeichen achten!)}
$$

$$
\text{c)} \quad \begin{vmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & & -4 \\ & \text{X} & \\ 2 & & 1 \\ & \text{X} & \\ -3 & & -5 \\ & \text{X} & \\ -1 & & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 + 8 \\ -10 + 3 \\ 12 - 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 \\ -7 \\ 7 \end{vmatrix}.
$$

Satz: Das Vektorprodukt zweier Vektoren ist ein Vektor, der senkrecht auf beiden Vektoren steht.

Der Beweis erfolgt einfach durch ausrechnen: Das Skalarprodukt muss Null ergeben:

$$
\vec{a} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2b_3 - b_2a_3 \\ a_3b_1 - b_3a_1 \\ a_1b_2 - b_1a_2 \end{vmatrix} = a_1(a_2b_3 - b_2a_3) + a_2(a_3b_1 - b_3a_1) + a_3(a_1b_2 - b_1a_2) = 0
$$

$$
\vec{b} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2b_3 - b_2a_3 \\ a_3b_1 - b_3a_1 \\ a_1b_2 - b_1a_2 \end{vmatrix} = b_1(a_2b_3 - b_2a_3) + b_2(a_3b_1 - b_3a_1) + b_3(a_1b_2 - b_1a_2) = 0
$$

In diesem Zusammenhang werden die folgenden Ausführungen nicht benötigt. Sie sind jedoch für das Verständnis des dreidimensionalen Vektorraumes wissenswert.

Regeln für das Vektorprodukt

das Distributivgesetz	$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
das gemischte Assoziativgesetz	$(k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b}) = k(\vec{a} \times \vec{b})$ für $k \in \mathbf{R}$
Das Antikommutativgesetz	$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$
Das Produkt der Einheitsvektoren	Für $\vec{e}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ und $\vec{e}_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ gilt: $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$ und $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$
Das Vektorquadrat	stets ist $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$. Allgemeiner: Das Vektorprodukt von linear abhängigen Vektoren ist Null. Umgekehrt gilt: Ist das Vektorprodukt Null, dann sind die Faktoren linear abhängig.
Der Betrag des Vektorpruduktes ist gleich der Fläche des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms.	$\lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert = \lvert\vec{a}\rvert \lvert\vec{b}\rvert \lvert\sin\alpha\rvert$ α = Winkel, den die Vektoren einschließen

Das Assoziativgesetz hier heißt "gemischt", weil dabei Vektoren und Skalare gemischt werden.

Das ("ungemischte") Assoziativgesetz gilt nicht, was man am folgendem Beispiel erkennt:

$$
(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1) \times \vec{e}_2 \neq \vec{e}_1 \times (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2), \text{ nämlich } \vec{0} \neq -\vec{e}_2
$$

Dass das Kommutativgesetz nicht gilt, ist offensichtlich: Beim Vertauschen der Faktoren ändert sich das Vorzeichen.

Test auf Basiswissen

1. Schreibe einen beliebigen Vektor (zwei- oder dreidimensional auf) und berechne seinen Betrag. Kontrolliere das Ergebnis mit TTMathe! Zum Beispiel:

a) $\begin{vmatrix} 4 \\ 3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 6 \\ 2{,}5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 4{,}8 \\ 1{,}4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -2 \\ 6 \end{vmatrix}$

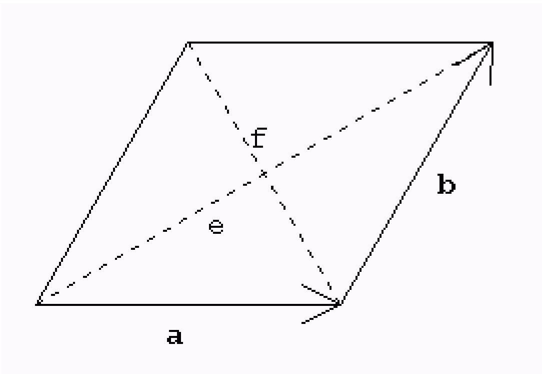
b) $\begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -2 \\ -6 \\ 9 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -3 \\ -4 \\ 12 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{vmatrix}$

2. Schreibe zwei beliebige Vektoren auf und berechne den Winkel, den die Vektoren einschließen. Kontrolliere das Ergebnis mit TTMathe! Zum Beispiel:

a) $\vec{a} = \begin{vmatrix} 4 \\ 3 \end{vmatrix}$ $\vec{b} = \begin{vmatrix} 12 \\ -5 \end{vmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{vmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{vmatrix}$ $\vec{b} = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{vmatrix}$

3. Schreibe drei beliebige Punkte eines Dreiecks hin und berechne die Innenwinkel. Kontrolliere das Ergebnis mit TTMathe!
Zum Beispiel: A(1|-2|1)B(-3|1|4)C(5|-2|1)

Lösungen: siehe 33. Lektion



Raute

4. a) Beweise, dass in einer Raute die Diagonalen othogonal zueinander sind! Das heißt:

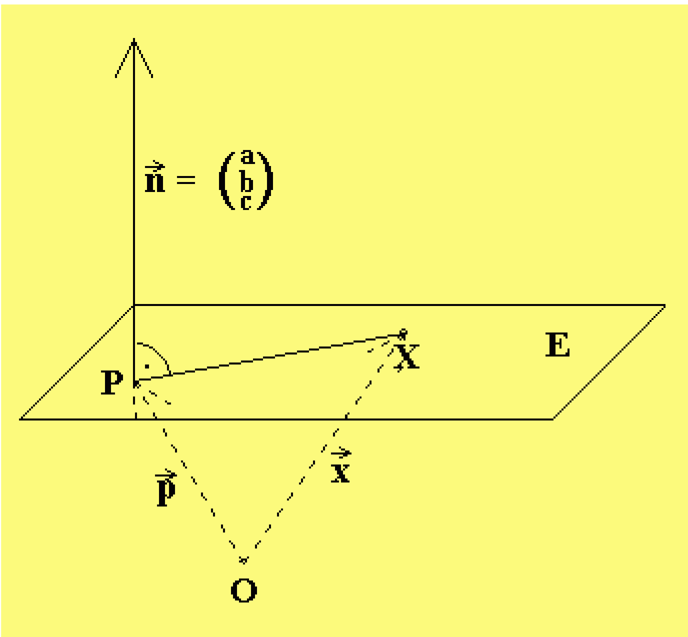
Ist a = b, dann stehen e und f senkrecht aufeinander.

Hinweis: Führe Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein und stelle die Diagonalen als Linearkombinationen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar.

b) Beweise auch die Umkehrung!

Lösungen

Anwendungen



E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

Die Normalenform der Ebenengleichung

Sei $\vec{n}$ ein Normalenvektor von E, d.h. $\vec{n}$ verläuft senkrecht zu E und sei P ein fester Punkt von E. Dann gilt für alle Punkte X ε E:
$\overrightarrow{PX} \perp \vec{n}$, d.h. $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$, wobei $\vec{x}$ und $\vec{p}$ die Ortsvektoren von X und P sind.
Sei zum Beispiel $\vec{n} = \begin{vmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix}$ und P(3|-2|5), dann

gilt für alle Punkte $X(x_1|x_2|x_3)$ ε E:

$$\begin{vmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 + 2 \\ x_3 - 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix} = 0,$$

also E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 - 15 = 0$.

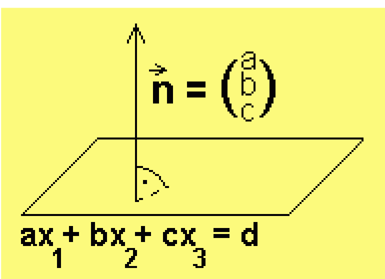
Wir haben also gezeigt:

Ist $\vec{n} = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \perp$ E, dann lautet die Gleichung der Ebene:

$$E: \begin{vmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ x_3 - p_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} = 0 \text{ oder } a(x_1 - p_1) + b(x_2 - p_2) + c\,(x_3 - p_3) = 0$$

oder E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ für ein passendes d ε **R**.

Umgekehrt gilt:



Merke!

Bei der Ebene mit der Gleichung E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

ist $\vec{n} = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \perp$ E, d.h. $\vec{n} = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ ist ein **Normalenvektor** von E.

Sind nämlich $P(p_1|p_2|p_3)$ und $Q(q_1|q_2|q_3)$ zwei beliebige Punkte von E, also Punkte

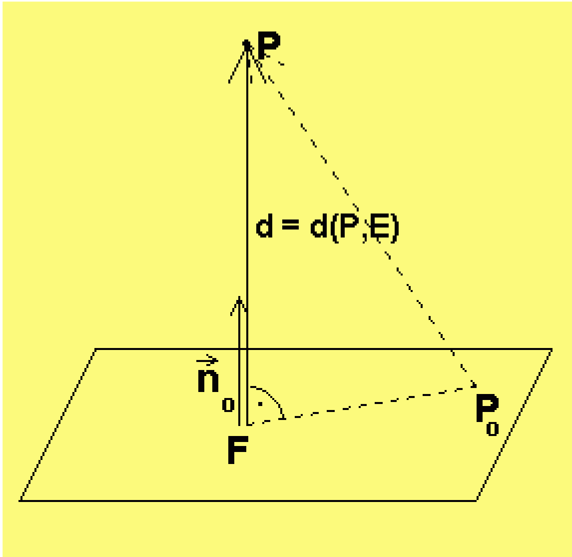
deren Koordinaten die Gleichung $ap_1 + bp_2 + cp_3 = d$ und $aq_1 + bq_2 + cq_3 = d$ erfüllen, dann

gilt $\overrightarrow{PQ} \cdot \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} = (q_1 - p_1)a + (q_2 - p_2)\cdot b + (q_3 - p_3)\cdot c$

$$= (aq_1 + bq_2 + cq_3) - (ap_1 + bp_2 + cp_3) = d - d = 0.$$

Somit ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp \overrightarrow{PQ}$ für alle möglichen Richtungen $\overrightarrow{PQ}$ von E, d.h. $\vec{n} \perp E$.

Die Hesse-Form...



... dient zur A b s t a n d s berechnung.

Gegeben ist die Ebene E durch E: $(\vec{x} - \vec{p}_o) \cdot \vec{n} = 0$

und ein Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$.

Ersetzten wir nun den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E durch einen Einheitsvektor $\vec{n}_o = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$, so erhalten wir die **Hessesche Normalenform** E: $(\vec{x} - \vec{p}_o) \cdot \vec{n}_0 = 0$

und der Abstand d = d(P,E) berechnet sich zu

$$\mathbf{d} = \left|(\vec{p} - \vec{p}_0) \cdot \vec{n}_0\right| \quad \text{mit} \quad \vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Beweis: F sei die senkrechte Projektion von P auf E, d.h. der Schnittpunkt der Geraden senkrecht zu E durch P mit E. Der Trick bei der Hesseform ist, dass F für die Berechnung nicht benötigt wird: F fällt heraus.) Der Abstand d des Punktes P von E soll berechnet werden.

Der Einheitsvektor $\vec{n}_0$ hat die Länge 1 und es ist deshalb $d \cdot \vec{n}_0 = \overrightarrow{FP}$.

($\vec{n}_0$ könnte auch die entgegengesetzte Richtung haben. Da wir aber letztendlich mit dem Betrag rechnen, können wir diesen Fall vernachlässigen.)

Jetzt kommt der Trick: Aus $\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0 = 1$ folgt $\overrightarrow{FP} \cdot \vec{n}_0 = d\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0 = d$ und, da $\overrightarrow{P_0F} \cdot \vec{n}_0 = 0$

ergibt sich $(\vec{p} - \vec{p}_0) \cdot \vec{n}_0 = \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n}_0 = (\overrightarrow{P_0F} + \overrightarrow{FP}) \cdot \vec{n}_0 = 0 + \overrightarrow{FP} \cdot \vec{n}_0 = d$.

Den vorhin erwähnten zweiten Fall berücksichtigend ist also $d = \left|(\vec{p} - \vec{p}_0) \cdot \vec{n}_0\right|$.

Die Hesseform als Kordinatengleichung

Die Hesseform von E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = e$ lautet E: $\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 - e}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$

und der Abstand $P(p_1|p_2|p_3)$ von E ist dann $d = \left|\frac{ap_1 + bp_2 + cp_3 - e}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|$

Der Zusammenhang der Vektordarstellung mit der Koordinatenform ist nämlich folgender:

$$(\vec{x} - \vec{p}_0) \cdot \vec{n} = 0 \iff \begin{pmatrix} x_1 - p_{01} \\ x_2 - p_{02} \\ x_3 - p_{03} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff a(x_1 - p_{01}) + b(x_2 - p_{02}) + c(x_3 - p_{03}) = 0$$

$\iff ax_1 + bx_2 + cx_3 - e = 0$ für $e = ap_{01} + bp_{02} + cp_{03}$ und $P_0(p_{01}|p_{02}|p_{03})$.

Beispiel: Der Abstand des Punktes P(-7|11|-13) von der Ebene E: $2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 24$

berechnet sich über die Hesse-Form der Ebenengleichung E: $\frac{2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 24}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = 0$

zu $d = d(P,E) = \left|\frac{2\cdot(-7) - 3\cdot 11 + 6\cdot(-13) - 24}{7}\right| = 21\frac{2}{7}$.

Du kannst diese Rechnung und Deine Rechnungen überprüfen mit TTmathe|Geometrie Punkt Abstand.

Abstand Punkt-Geraden

Hinweis. Siehe auchAufgabe 8b mit Lösung.

Der Abstand windschiefer Geraden

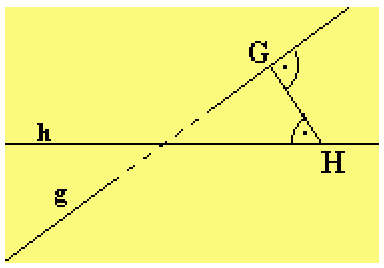
Dieser Abschnitt ist für Fortgeschrittene!

Gegeben seien zum Beispiel die windschiefen Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Rechnung wird ausgeführt:
TTMathe|Geometrie|Zwei Geraden

Um den Abstand der beiden Geraden zu bestimmen wählen wir einen Punkt G(9-2s|10+s|-2) auf g und einen Punkt



$H(1|-3+t|-4+3t)$ auf h und bestimmen s und t so, dass der Vektor $\overrightarrow{GH}$ senkrecht zu g und senkrecht zu h verläuft.

Senkrecht stehen heißt: Skalarprodukt der Richtungsvektoren = 0.

$\Rightarrow \overrightarrow{GH} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\overrightarrow{GH} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ mit $\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} -8+2s \\ -13+t-s \\ -2+3t \end{pmatrix}$. Also

$-2(-8+2s) + 1(-13+t-s) + 0 = 0$ oder $-5s + t = -3$ (1)

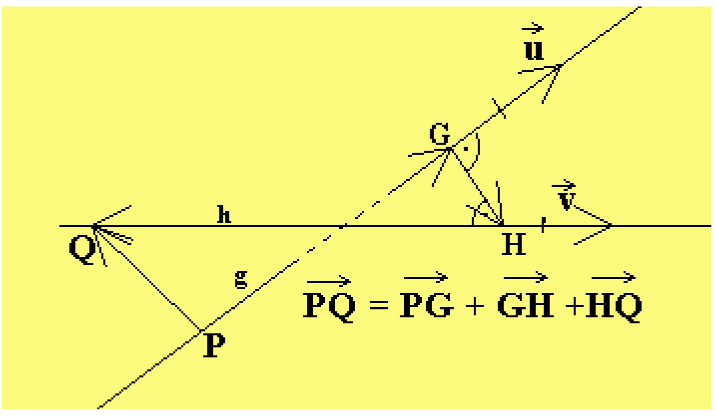
und $0 + 1(-13+t-s) + 3(-2+3t) = 0$ oder $-s + 10t = 19$ (2)

Das LGS (1) und (2) hat die Lösung s = 1 und t = 2.

Einsetzen des Parameter s = 1 ergibt $G(7|11|-2)$ und t = 2 ergibt $H(1|-1|2)$. Der Abstand der windschiefen Geraden ist also

$$d(g,h) = d(G,H) = \sqrt{(1-7)^2 + (-1-11)^2 + (2+2)^2} = 14 \text{ LE}$$

Alternative Rechnung



Einfacher, aber theoretisch anspruchsvoller:
(Wer die Herleitung überspringen will, gehe gleich zur **Formel** $d(g,h) = |(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0|$ weiter unten.)

Sei $\vec{u}$ der Richtungsvektor von g und $\vec{v}$ der Richtungsvektor von h.

Im Beispiel hier also $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Dann suchen wir zunächst

einmal einen Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ mit $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ und $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.

Mit Hilfe des Vektorproduktes kann man diesen direkt berechnen: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 0 \\ 0 + 6 \\ -2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Ohne Kenntnis des Vektorproduktes können wir folgendermaßen vorgehen:

Wir lösen das LGS $-2a + b = 0$ und $b + 3c = 0$. Wählen wir etwa a = 3 (beliebig), dann muss b = 6 und c = − 2 sein. Eine Lösung des LGS ist also

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$. (Die Lösung ist bis auf ein Vielfaches eindeutig!)

Als nächsten bestimmen wir einen Einheitsvektor n_0 (bis auf das Vorzeichen eindeutig!) von $\vec{n}$, hier also $\vec{n}_0 = \frac{1}{7} \vec{n}$.

Jetzt kommt der geniale **Trick**: $\overrightarrow{GH}$ ist ein Vielfaches von n_0.

Beide Vektoren stehen ja senkrecht auf $\vec{u}$ und auf $\vec{v}$.

Noch mehr: Aus $\overrightarrow{GH} = x \cdot n_0$ (was ja für ein x möglich ist) folgt: $|\overrightarrow{GH}| = |x| \cdot |n_0| = |x| \cdot 1 = |x|$.
d.h. x gibt bis auf das Vorzeichen die Länge von $\overrightarrow{GH}$ und damit den Abstand d(g,h) an!

Es kommt noch toller: $\overrightarrow{GH} \cdot \vec{n}_0 = x \cdot \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0 = x$, da $\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0 = 1$.

Und: Wähle ich einen beliebigen Punkt P auf g und einen beliebigen Punkt Q auf h, dann ist $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}_0 = (\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HQ}) \cdot n_0 = \overrightarrow{GH} \cdot n_0 = x$,
da ja $\overrightarrow{PG}$ und $\overrightarrow{HQ}$ auf n_0 senkrecht stehen, also $\overrightarrow{PG} \cdot n_0 = \overrightarrow{HQ} \cdot n_0 = 0$ ist.

Somit erhalten wir als **Formel** für den Abstand zweier windschiefer Geraden:

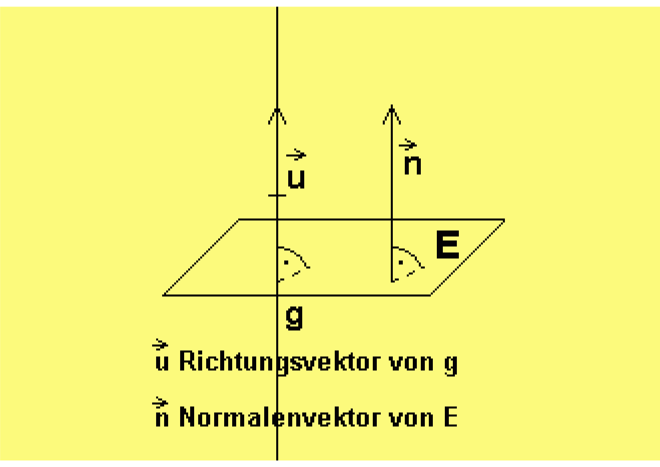
$\mathbf{d(g,h) = |(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0|}$, wobei p und q Ortsvektoren beliebiger Punkte von g und h und $\vec{n}_0$ ein Einheitsvektor senkrecht zu g und h ist.

Im Beispiel wählen wir $\vec{p} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Der Abstand berechnet sich dann zu $d(g,h) = \frac{1}{7} |(-8) \cdot 3 + (-13) \cdot 6 + (-2) \cdot (-2)| = 14$ LE

Test auf Basiswissen

5. Bestimme die Gleichung der Ebene durch P(3|-7|11) mit dem Normalenvektor $n = \begin{vmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{vmatrix}$!



6. Gegeben Ebene E und Punkt P (beliebig).
   Gesucht Gerade g senkrecht zu E durch P.

   Beispiel E: $2x_1 - 7x_3 = 25$, P(0|8|-11)

7. Umgekehrt: Gegeben Gerade g und Punkt P.
   Gesucht Ebene E senkrecht zu g durch P.

   Beispiel: g: $\vec{x} = \begin{vmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \end{vmatrix} + t \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}$, P(1|2|-3)

8. Abstandsberechnungen. Kontolliere Deine Ergebnisse mit TTMathe!

   a) Schreibe eine beliebige Ebene E und einen Punkt P auf und berechne den Abstand d(P,E)!

      Zum Beispiel: E: $2x_1 - x_2 - 5x_3 = 3$ P(-1|2|1)

      Berechne den Abstand auch ohne die Hessesche Normalenform von E!

   b) Schreibe eine beliebige Gerade g und einen Punkt P auf und berechne den Abstand d(P,g)!

      Zum Beispiel g: $\vec{x} = \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} + t \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ P(4|6|2)

   c) Schreibe zwei beliebige nichtparallele (und im Normalfall auch sich nicht schneidende also windschiefe) Geraden g und h auf und berechne ihren Abstand.

      Zum Beispiel g: $\vec{x} = \begin{vmatrix} 8 \\ 8 \\ 5 \end{vmatrix} + s \cdot \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{vmatrix} 7 \\ 2 \\ 10 \end{vmatrix} + t \cdot \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix}$

Lösungen

Wie TTMathe rechnet